Algèbre homologique

Cohomologie cyclique et foncteurs Ext^n

Note de Alain Connes, Membre de l'Académie

(27 juin 1983)

Nous construisons un foncteur $\mathcal{A} \to \mathcal{A}^\natural$ de la catégorie des algèbres (non commutatives) sur un corps k, dans une catégorie abélienne, et montrons que la cohomologie cyclique $H^n_\lambda(\mathcal{A})$ que nous avons introduite et étudiée dans [5] et [6] coïncide avec $\mathrm{Ext}^n(\mathcal{A}^\natural,k^\natural)$. On en déduit une définition naturelle de la théorie bivariante (et de la cohomologie cyclique d'un anneau). La catégorie abélienne que nous utilisons est celle des k-espaces vectoriels *cycliques*. La notion d'objet cyclique dans une catégorie arbitraire est voisine de celle d'objet simplicial. Le rôle de la catégorie Δ des ensembles totalement ordonnés finis et tenu par une petite catégorie Λ qui contient à la fois Δ et les groupes cycliques finis. Nous montrons que le classifiant $B\Lambda$ est égal à $P_\infty(\mathbb{C}) = BS^1$.

Homological algebra – *Cyclic Cohomology and Functors* Ext^n.

We construct a functor $\mathcal{A} \to \mathcal{A}^\natural$ *from the category of (non commutative) algebras over a field* k*, to an abelian category and show that the cyclic cohomology* $H^n_\lambda(\mathcal{A})$*, which we introduced and studied in* [5] *and* [6] *coincides with* $\mathrm{Ext}^n(\mathcal{A}^\natural,k^\natural)$*. A natural definition of the bivariant theory follows. The abelian category used above is the category of* cyclic *vector spaces. The notion of cyclic object in a category is analogous to the notion of simplicial object. The category* Δ *of totally ordered finite sets is replaced by a small category* Λ *containing* Δ *and all cyclic finite groups. We show that the classifying space* $B\Lambda$ *is equal to* $P_\infty(\mathbb{C}) = BS^1$*.*

1 Introduction

Dans [8], G.G. Kasparov a défini dans le cadre des C^*-algèbres la K-théorie bivariante $KK(A,B)$ groupe abélien contravariant en A et covariant en B (où A et B sont des C^*-algèbres). Pour $A = \mathbb{C}$ ce foncteur se réduit à la K-théorie $K_0(B)$ et pour $B = \mathbb{C}$ à la K-homologie de A, qui aux nuances près a été introduite par Brown Douglas Fillmore [2] et Atiyah [1].

La propriété principale du bifoncteur $KK(A,B)$ est l'existence d'un cup-produit: $KK(A,B) \times KK(B,C) \to KK(A,C)$ (*cf.* [8]). Ce produit a les mêmes propriétés formelles que le produit de Yoneda:

$$\mathrm{Ext}^n(M,N) \times \mathrm{Ext}^m(N,P) \to \mathrm{Ext}^{n+m}(M,P)$$

en algèbre homologique (*cf.* [10], III, 5), mais bien entendu la catégorie des C^*-algèbres n'étant pas additive, la notion de foncteur dérivé de $\mathrm{Hom}(A,B)$ n'y a pas de sens.

Dans [5], la construction, au niveau algébrique, du caractère de Chern en K-homologie nous a dicté la définition suivante de la cohomologie cyclique $H^n_\lambda(\mathcal{A})$, $n \in \mathbb{N}$, d'une algèbre non commutative arbitraire $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{C}$. C'est la cohomologie du complexe de cochaînes (C_λ,b) où:

(a) $C^n_\lambda(\mathcal{A})$ est l'espace des formes $n+1$ linéaires φ sur $\mathcal{A}$ telles que:

$$\varphi(x^1,\ldots,x^n,x^0) = (-1)^n \varphi(x^0,\ldots,x^n)\,, \qquad \forall\, x^i \in \mathcal{A}\,;$$

(b) $b : C^n_\lambda \to C^{n+1}_\lambda$ est donné par:

$$\begin{aligned}(b\varphi)(x^0,\ldots,x^{n+1}) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \varphi(x^0,\ldots,x^i x^{i+1},\ldots,x^{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1}\varphi(x^{n+1}x^0,\ldots,x^n)\,.\end{aligned}$$

Dans [6], nous avons montré comment relier la cohomologie cyclique $H^*_\lambda(\mathcal{A})$ à la cohomologie de Hochschild $H^*(\mathcal{A},\mathcal{A}^*)$ de $\mathcal{A}$ à coefficients dans le bimodule $\mathcal{A}^*$ des formes linéaires sur $\mathcal{A}$. La relation s'exprime par un opérateur de périodicité de degré 2: $S : H^n_\lambda(\mathcal{A}) \to H^{n+2}_\lambda(\mathcal{A})$ et un couple exact:

$$\begin{tikzcd} & H^*(\mathcal{A},\mathcal{A}^*) \arrow[dl, "B"'] & \\ H^*_\lambda(\mathcal{A}) \arrow[rr, "S"] & & H^*_\lambda(\mathcal{A}) \arrow[ul, "I"'] \end{tikzcd}$$

Comme on dispose, pour calculer la cohomologie de Hochschild, des outils de l'algèbre homologique, le couple exact ci-dessus nous a permis de terminer le calcul de $H^*_\lambda(\mathcal{A})$ dans quelques exemples importants: [6].

Le but de cette Note est de montrer que les foncteurs $H^n_\lambda(\mathcal{A})$ sont des cas particuliers des foncteurs Ext^n de l'algèbre homologique, ce qui nous donnera:

1) Une définition naturelle de la théorie bivariante et du produit.
2) Une définition naturelle de $H^n_\lambda(\mathcal{A})$ quand $\mathcal{A}$ n'est plus une $\mathbb{C}$-algèbre mais est un anneau (non commutatif).

Nous montrons également que le couple exact ci-dessus se prolonge dans le cadre 2).

Il reste à prolonger au cadre bivariant la définition du caractère de Chern de [5] et à montrer sa compatibilité avec le produit. La catégorie des algèbres et homomorphismes n'est pas additive mais nous construisons un foncteur $\mathcal{A} \to \mathcal{A}^\natural$ de cette catégorie dans la catégorie abélienne des *espaces vectoriels cycliques*, de telle sorte que $H^n_\lambda(\mathcal{A}) = \mathrm{Ext}^n(\mathcal{A}^\natural,\mathbb{C}^\natural)$, pour toute algèbre $\mathcal{A}$.

2 Objet cyclique dans une catégorie

La notion d'objet cyclique dans une catégorie arbitraire est analogue à celle d'objet simplicial. Rappelons qu'un objet simplicial d'une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée d'un foncteur contravariant de Δ dans $\mathcal{C}$, où Δ est la catégorie dont les objets sont les ensembles finis totalement ordonnés non vides et les flèches les applications croissantes au sens large [4].

La notion d'objet cyclique s'obtient en remplaçant Δ par la petite catégorie Λ dont les objets Λ_n sont indexés par $n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$ et dont les flèches $f \in \mathrm{Hom}(\Lambda_n,\Lambda_m)$ sont les classes d'homotopie d'applications continues croissantes φ de degré 1 de S^1 dans S^1 telles que $\varphi(\mathbb{Z}_{n+1}) \subset \mathbb{Z}_{m+1}$. Ici $S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\}$ et pour tout n, $\mathbb{Z}_n$ désigne le sous-groupe formé des racines n-ièmes de 1.

Il est clair que $\mathrm{Hom}(\Lambda_n,\Lambda_m)$ est fini pour tous n,m et que pour $\lambda \in \mathbb{Z}_{n+1}$ la valeur de $\varphi(\lambda)$ ne dépend pas du choix de φ dans la classe de f, notons-la $\tilde{f}(\lambda)$. On obtient ainsi un foncteur $f \to \tilde{f}$ de Λ dans la catégorie des ensembles. On vérifie que si $\tilde{f}$ n'est pas une application constante elle détermine uniquement f, mais qu'il existe $n+1$ éléments $f \in \mathrm{Hom}(\Lambda_n,\Lambda_m)$ tels que $\tilde{f}$ soit l'application constante $\tilde{f}(i) = j$, $\forall\, i \in \mathbb{Z}_{n+1}$. Cela montre en particulier que Λ_0 n'est pas un objet final de Λ. Orientons S^1 (dans le sens trigonométrique) et associons à tout couple $\lambda,\mu \in S^1$ le fermé connexe $I = [\lambda,\mu]$, $I \subset S^1$, $I \neq S^1$.

Pour $f \in \mathrm{Hom}(\Lambda_n,\Lambda_m)$ posons $f^{-1}\{j\} = \bigcap_{\varphi \in f} \varphi^{-1}\{j\}$, $j \in \mathbb{Z}_{m+1}$. C'est par construction un fermé connexe de S^1, distinct de S^1, et s'il est non vide ses extrémités λ,μ sont dans $\mathbb{Z}_{n+1}$. La donnée de $f \in \mathrm{Hom}(\Lambda_n,\Lambda_m)$ équivaut à celles d'intervalles I_j ($I_j = f^{-1}\{j\}$), $j \in \mathbb{Z}_{m+1}$ tels que:

1) Si $I_j \neq \emptyset$, I_j est de la forme $[\lambda,\mu]$ avec $\lambda,\mu \in \mathbb{Z}_{n+1}$.
2) Les $I_j \cap \mathbb{Z}_{n+1}$ forment une partition de $\mathbb{Z}_{n+1}$.
3) Si $I_j = [\lambda,\mu] \neq \emptyset$, $I_{j+1} = \emptyset, \ldots, I_{j-1} = \emptyset$, $I_j = [\lambda',\mu'] \neq \emptyset$, on a $\lambda' = \mu + 1$ dans $\mathbb{Z}_{n+1}$.

Pour $f \in \mathrm{Hom}(\Lambda_n,\Lambda_m)$, soit $f^* \in \mathrm{Hom}(\Lambda_m,\Lambda_n)$ tel que:

(a) $f^{*-1}\{k\} = \emptyset$ si aucun des intervalles $I_j = f^{-1}\{j\} = [\lambda_j,\mu_j]$ vérifie $\lambda_j = k$.
(b) $f^{*-1}\{\lambda_j\} = [i+1,j]$ où $i \in \tilde{f}(\mathbb{Z}_{n+1})$, $i+1,\ldots,j-1 \notin \tilde{f}(\mathbb{Z}_{n+1})$.

Lemme 1. *L'application $f \to f^*$ définit un isomorphisme de la petite catégorie Λ sur la catégorie opposée Λ^0.*

On n'a pas $f^{**} = f$ mais l'automorphisme $f \to f^{**}$ de Λ est intérieur. Nous laissons la vérification au lecteur. La structure de Λ est précisée par la décomposition $\Lambda = \Delta K$ (lemme 2) où K désigne la sous-catégorie de Λ dont les flèches sont les isomorphismes de Λ [K est donc la réunion des groupes cycliques $\mathbb{Z}_{n+1} = \mathrm{Aut}(\Lambda_n)$], et où Δ est considérée comme une sous-catégorie de Λ de la manière suivante: Pour tout n soit $\theta_n \in]n/(n+1),1[$ et soit $\alpha_n = \exp 2\,\pi\, i\, \theta_n \in S^1$. L'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues croissantes φ de degré 1 de S^1 dans S^1 telles que $\varphi(\alpha_n) = \alpha_m$, et $\varphi(\mathbb{Z}_{n+1}) \subset \mathbb{Z}_{m+1}$ est identifié à $\mathrm{Hom}(\Delta_n,\Delta_m)$ par l'application $\varphi \to \tilde{\varphi}$. Cette identification de Δ à une sous catégorie de Λ ne dépend pas du choix des α_n, de plus:

Lemme 2. *Toute flèche f de Λ s'écrit de manière unique $f = sk$, où $s \in \Delta$, $k \in K$.*

L'existence de la décomposition résulte de la surjectivité de tout $\varphi \in f$ et de $\varphi(\mathbb{Z}_{n+1}) \subset \mathbb{Z}_{m+1}$. L'unicité est immédiate. ∎ En combinant les lemmes 1 et 2 on obtient la décomposition $\Lambda = K\Delta^*$.

Définition 3. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie; on appelle objet cyclique de $\mathcal{C}$ la donnée d'un foncteur covariant de Λ dans $\mathcal{C}$.*

On peut en particulier associer à toute catégorie $\mathcal{C}$ la catégorie $\mathrm{Cycl}\,(\mathcal{C})$ des objets cycliques de $\mathcal{C}$, dont les morphismes sont les morphismes des foncteurs. Si $\mathcal{C}$ est abélienne, il en est de même de $\mathrm{Cycl}\,(\mathcal{C})$. Pour abréger, nous utiliserons la terminologie $k(\Lambda)$-module pour désigner les objets cycliques dans la catégorie des espaces vectoriels sur un corps k.

3 Le $k(\Lambda)$-module $\mathcal{A}^\natural$ associé à une algèbre $\mathcal{A}$

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre unifère. pour tout $n \geqq 0$ posons $\mathcal{A}^\natural_n = \mathcal{A} \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}$ ($n+1$ termes), et définissons pour tout $f \in \mathrm{Hom}(\Lambda_n,\Lambda_m)$ une application linéaire $T = \mathcal{A}^\natural_f$ de $\mathcal{A}_n$ dans $\mathcal{A}_m$ par l'égalité:

$$T(x^0 \otimes \ldots \otimes x^n) = y^0 \otimes \ldots \otimes y^m$$

où $y^j = 1$ si $f^{-1}\{j\} = \emptyset$ et $y^j = x^\lambda x^{\lambda+1} \ldots x^\mu$ si $f^{-1}\{j\} = [\lambda,\mu]$.

On obtient ainsi un $k(\Lambda)$-module $\mathcal{A}^\natural$. Il est clair que tout homomorphisme $\rho : \mathcal{A} \to B$ d'algèbres unifères définit un morphisme $\rho^\natural$ de $k(\Lambda)$-modules par l'égalité:

$$\rho^\natural(x^0 \otimes \ldots \otimes x^n) = \rho(x^0) \otimes \ldots \otimes \rho(x^n)\,, \qquad \forall\, x^i \in \mathcal{A}\,.$$

Lorsque l'algèbre $\mathcal{A}$ est commutative, $T = \mathcal{A}^\natural_f$ ne dépend que de $\tilde{f}$ et s'écrit $T(x^0 \otimes \ldots \otimes x^n) = y^0 \otimes \ldots \otimes y^m$, où $y^i = \prod\limits_{\tilde{f}(j)=i} x^j$. Pour $\mathcal{A} = k$ on obtient le $k(\Lambda)$-module trivial $k^\natural$.

Proposition 4. *L'application qui à toute trace τ sur $\mathcal{A}$ associe le morphisme $\tau' \in \mathrm{Hom}_{k(\Lambda)}(\mathcal{A}^\natural,k^\natural)$ défini par:*

$$\tau'(x^0 \otimes \ldots \otimes x^n) = \tau(x^0 \ldots x^n)\,, \qquad \forall\, x^i \in \mathcal{A}\,,$$

est un isomorphisme de l'espace des traces sur $\mathcal{A}$ sur $\mathrm{Hom}_{k(\Lambda)}(\mathcal{A}^\natural,k^\natural)$.

Plus généralement, pour tout $k(\Lambda)$-module E, l'espace $\mathrm{Hom}_{k(\Lambda)}(E,k^\natural)$ s'identifie à l'espace des formes linéaires l sur E_0 telles que $l \circ (d^0)^* = l \circ (d^1)^*$ où $(d^0)^*,(d^1)^*$ sont deux éléments de $\mathrm{Hom}(\Lambda_1,\Lambda_0)$.

Remarque 5. Par abus de notation nous continuerons à noter $\mathcal{A}^\natural$ le Λ-module (i.e. objet cyclique dans la catégorie des groupes abéliens) associé comme ci-dessus à un anneau unifère $\mathcal{A}$.

4 Calcul de $\mathrm{Ext}^n(\mathbb{Z}^\natural,E)$

Soient E un Λ-module et $\mathbb{Z}^\natural$ le Λ-module trivial. Nous construisons un bicomplexe $(C^{n,m},d_i)$, $n,m > 0$, $i = 1,2$ de Λ-modules qui est une résolution projective du Λ-module trivial.

Pour $k \in \mathbb{N}$, soit C^k le Λ-module tel que:

(a) C^k_n est le groupe abélien libre sur l'ensemble $\mathrm{Hom}(\Lambda_k,\Lambda_n)$.

(b) $\alpha\, e_\beta = e_{\alpha\beta}$, $\forall\, \alpha \in \Lambda$, où $\{e_\beta\}$ est la base canonique.

L'égalité $\mathrm{Hom}_\Lambda(C^k,E) = E_k$ montre que C^k est un Λ-module projectif pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $\alpha \in \mathrm{Hom}(\Lambda_k,\Lambda_{k'})$ l'égalité $C(\alpha)\, e_\beta = e_{\beta\circ\alpha}$ détermine $C(\alpha) \in \mathrm{Hom}_\Lambda(C^{k'},C^k)$ et l'on a $C(\alpha\beta) = C(\beta)\, C(\alpha)$.

Posons $C^{n,m} = C^m$, $\forall n,m \in \mathbb{N}$ et construisons d_i, $i = 1,2$.

Construction de d_1. – $C^{n+1,m} \to C^{n,m}$. – Elle n'invoque que les morphismes $C(\alpha)$ pour $\alpha \in K$ (i.e. α inversible dans Λ). Comme m est fixé, tous les $C^{n,m}$ sont égaux à C^m et le groupe cyclique $\mathbb{Z}_{m+1} = \mathrm{Aut}(\Lambda_m)$ agit sur C^m. Posons $T = (-1)^m\, C(1)$, où $1 \in \mathbb{Z}_{m+1} = \mathrm{Aut}(\Lambda_m)$ et $D = 1 - T$, $A = 1 + T + \ldots + T^m$. Pour n pair posons $d_1^{n,m} = D$ et pour n impair $d_1^{n,m} = A$. On a par construction $d_1^2 = 0$, de plus le lemme 2 montre que C^m est un $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{m+1}]$-module libre et donc (*cf.* [3]) que l'on a une longue suite exacte de Λ-modules:

$$0 \longleftarrow C^m/\mathrm{Im}\, D \longleftarrow C^{0,m} \xleftarrow{d_1} C^{1,m} \xleftarrow{d_1} C^{2,m} \longleftarrow \ldots .$$

Construction de d_2. – $C^{n,m+1} \to C^{n,m}$. – Elle n'invoque que les $C(\alpha)$, $\alpha \in \Delta$. Ceux-ci déterminent un objet simplicial X de la catégorie des Λ-modules. Notons alors $F_i^m : C^m \to C^{m-1}$ l'opérateur de face correspondant, on a $F_i^m = C(S_i^m)$ où S_i^m est l'injection croissante de $\{0,1,\ldots,m-1\}$ dans $\{0,1,\ldots,m\}$ qui oublie i. Posons $b_m = \sum\limits_{i=0}^{m} (-1)^i F_i^m$, i.e. considérons le complexe (non normalisé) associé au Λ-module simplicial ci-dessus. Pour n pair nous prendrons $d_2^{n,m} = b_{m+1} : C^{m+1} \to C^m$. Pour n impair, nous prendrons $d_2^{n,m} = -\, b'_{m+1} : C^{m+1} \to C^m$ où $b'_m = \sum\limits_{i=0}^{m-1} (-1)^i F_i^m$, ce qui correspond au Λ-module simplicial ΓX (*cf.* [4]).

Nous noterons $s : C^m \to C^{m+1}$ la flèche de dégénérescence: $D^m_m = C(s_m)$ où s_m est la surjection croissante de $\{0,1,\ldots,m+1\}$ sur $\{0,1,\ldots,m\}$ qui répète m. On a $b's + sb' = id$.

Lemme 6. *$(C^{n,m},d_i)$ est un complexe double de Λ-modules projectifs qui est une résolution du Λ-module trivial.*

Démonstration. On a $d_1^2 = d_2^2 = 0$. Pour montrer que $d_1 d_2 = -\, d_2\, d_1$ i.e. que $b'A = Ab$, $Db' = bD$, on utilise les égalités:

$$F_i^m = (-1)^i\, T_m^i\, F_0^m\, T_m^{-i}\,, \qquad i = 0,1,\ldots m\,.$$
$$T_m^{m+1} = 1\,.$$

Pour calculer l'homologie du bicomplexe (C,d), il suffit de déterminer celle du complexe:

$$C^0/\operatorname{Im} D \xleftarrow{b} C^1/\operatorname{Im} D \xleftarrow{b} \dots$$

car la d_1-homologie de (C,d) vaut $H_I^{n,m} = 0$ pour $n > 0$, et $H_I^{0,m} = C^m/\operatorname{Im} D$.

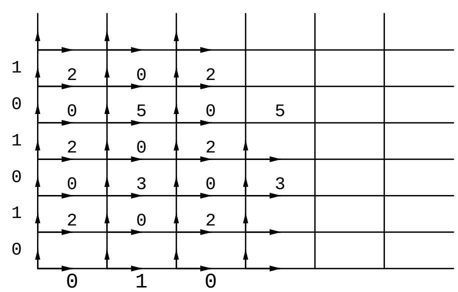
Le lemme 2 montre que les classes f_α des e_α, $\alpha \in \Delta$ dans $C^m/\operatorname{Im} D$ forment une base de ce groupe abélien libre. Ainsi le complexe de groupes abéliens:

$$C_k^0/\operatorname{Im} D \xleftarrow{b} C_k^1/\operatorname{Im} D \longleftarrow \dots$$

coïncide avec le complexe (non normalisé) associé à l'ensemble simplicial B^k suivant: pour tout n, B_n^k est l'ensemble des applications croissantes de $\{0,1,\dots,k\}$ dans $\{0,1,\dots,n\}$, et l'action de Δ est par composition à droite. Ainsi (la réalisation géométrique de B^k étant la boule de dimension k), l'homologie du complexe ci-dessus est nulle sauf en dimension 0 où elle est égale à $\mathbb{Z}$. On en déduit que l'homologie du bicomplexe (C,d) est nulle sauf en dimension 0 où elle donne le Λ-module trivial $\mathbb{Z}^\natural$. ■

Corollaire 7. *L'anneau* $\operatorname{Ext}_\Lambda^*(\mathbb{Z}^\natural,\mathbb{Z}^\natural)$ *est un anneau de polynomes* $\mathbb{Z}[\sigma]$*, où le générateur* σ *est de degré* 2.

Démonstration. Il s'agit de calculer la cohomologie du bicomplexe de groupes abéliens obtenu en appliquant à $(C^{n,m},d_i)$ le foncteur $\operatorname{Hom}_\Lambda(\cdot,\mathbb{Z}^\natural)$. Pour tout n,m on a $\operatorname{Hom}_\Lambda(C^{n,m},\mathbb{Z}^\natural) = (\mathbb{Z}^\natural)_m = \mathbb{Z}$. En calculant les flèches on obtient le bicomplexe suivant:



Il est clair que sa cohomologie H^n vaut 0 pour n impair et est égale à $\mathbb{Z}$ pour n pair avec pour générateur le cocycle dont la seule composante non nulle est au point $(n,0)$ et vaut $1 \in \mathbb{Z}$. Soit σ le générateur ainsi obtenu pour H^2, il définit un élément σ de $\operatorname{Ext}_\Lambda^2(\mathbb{Z}^\natural,\mathbb{Z}^\natural)$ et le corollaire résulte donc de:

Lemme 8. *Pour tout* Λ*-module* E *la translation* $(n,m) \to (n+2,m)$ *définit un endomorphisme du bicomplexe* $\operatorname{Hom}_\Lambda(C,E)$ *et donc un endomorphisme (de degré* 2*)* S *du groupe abélien gradué* $\operatorname{Ext}_\Lambda^*(\mathbb{Z}^\natural,E)$*. Cet endomorphisme* S *coïncide avec le produit (de Yoneda) par* $\sigma \in \operatorname{Ext}_\Lambda^2(\mathbb{Z}^\natural,\mathbb{Z}^\natural)$*.*

Remarque 9. On vérifie de même que les groupes $\operatorname{Tor}_n^\Lambda(\mathbb{Z}^\natural,\mathbb{Z}^\natural)$ sont obtenus comme homologie du bicomplexe transposé du bicomplexe ci-dessus. Ils sont donc égaux à $\mathbb{Z}$ pour n pair et nuls pour n impair.

Rappelons que l'espace classifiant d'une petite catégorie a été introduite par Grothendieck [7] (*cf.* aussi [11]).

Théorème 10. *L'espace classifiant* $B\Lambda$ *de la petite catégorie* Λ *est égal à* $BS^1 = P_\infty(\mathbb{C})$.

Démonstration. Comme l'ensemble $\mathrm{Hom}(\Lambda_n,\Lambda_m)$ n'est jamais vide, l'espace $B\Lambda$ est connexe. Comme $\mathrm{Hom}(\Lambda_0,\Lambda_0)$ est réduit à 1 élément, tout foncteur de Λ dans la catégorie des ensembles avec pour flèches les bijections est trivial. Ainsi (*cf.* [11]) $B\Lambda$ est simplement connexe. D'après ([11], p. 10) et le corollaire 7, l'anneau de cohomologie $H^*(B\Lambda,\mathbb{Z})$ est égal à $\mathbb{Z}[\sigma]$, $\sigma \in H^2(B\Lambda,\mathbb{Z})$. De même, d'après la remarque 8, l'homologie de $B\Lambda$ est sans torsion et la dualité canonique fait de $H^n(B\Lambda,\mathbb{Z})$ le groupe $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n,\mathbb{Z})$. Il en résulte que si f est l'application continue de $B\Lambda$ dans l'espace $K(\mathbb{Z},2)$ égal à $P_\infty(\mathbb{C})$ qui correspond à $\sigma \in H^2(B\Lambda,\mathbb{Z})$, l'application $f_* : H_n(B\Lambda,\mathbb{Z}) \to H_n(P_\infty(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour toute valeur de n. Ainsi le théorème de Whitehead (*cf.* [12]) montre que $\pi_n(B\Lambda) = \pi_n(P_\infty(\mathbb{C}))$ et donc $B\Lambda$ est un $K(\mathbb{Z},2)$ et est homotope à $P_\infty(\mathbb{C}) = BS^1$. ■

Remarquons qu'il n'existe aucun homomorphisme non trivial de Λ dans le groupe S^1.

Soit k un corps commutatif de caractéristique nulle. Utilisant le lemme 6 pour obtenir une résolution injective du $k(\Lambda)$-module trivial $k^\natural$ on a:

Théorème 11. *Pour toute* k*-algèbre* $\mathcal{A}$ *les groupes* $H^n_\lambda(\mathcal{A})$ *de cohomologie cyclique de* $\mathcal{A}$ *sont canoniquement isomorphes aux groupes* $\mathrm{Ext}^n_{k(\Lambda)}(\mathcal{A}^\natural,k^\natural)$.

5 Le couple exact reliant $\mathrm{Ext}_\Lambda(\mathbb{Z}^\natural,E)$ à $\mathrm{Ext}_\Delta(\mathbb{Z}^\natural,E)$

Nous utiliserons la terminologie Δ-module pour désigner un groupe abélien cosimplicial. Pour expliciter l'homomorphisme de restriction I de $\mathrm{Ext}^n_\Lambda(\mathbb{Z}^\natural,E)$ vers $\mathrm{Ext}^n_\Delta(\mathbb{Z}^\natural,E)$ qui correspond à l'inclusion $\Delta \subset \Lambda$ construisons un morphisme de la résolution projective naturelle (P^k,b) du Δ-module trivial vers la restriction à Δ du bicomplexe $(C^{n,m},d_i)$. Par construction P^k_n est le groupe abélien libre de base (f_α), α application croissante de $\{0,\ldots,k\}$ dans $\{0,\ldots,n\}$ et Δ agit à gauche sur $P^k : \alpha f_\beta = f_{\alpha\beta}$. Le complexe (P^k,b) est obtenu à partir du Δ-module simplicial P. Il est clair que l'égalité $I(f_\alpha) = e_\alpha \in C^{0,k}$, définit un morphisme du complexe (P^k,b) vers le bicomplexe $(C^{n,m},d_i)$ restreint à Δ, et induit l'identité en homologie.

Construction de $B : \mathrm{Ext}^n_\Delta(\mathbb{Z}^\natural,E) \to \mathrm{Ext}^{n-1}_\Lambda(\mathbb{Z}^\natural,E)$. – Le lemme 6 montre que $\mathrm{Ext}^n_\Lambda(\mathbb{Z}^\natural,E)$ est le n-ième groupe de cohomologie du bicomplexe $\mathrm{Hom}_\Lambda(C^{n,m},E)$, d_i^t. L'égalité $b's + sb' = \mathrm{id}$ montre que la d_2^t cohomologie de ce bicomplexe vaut $H^{n,m}_{II} = 0$ pour n impair. De plus, l'égalité $\mathrm{Hom}_\Delta(P^k,E) = \mathrm{Hom}_\Lambda(C^k,E) = E_k$ montre que pour n pair on a:

$$H^{n,m}_{II} = \mathrm{Ext}^m_\Delta(\mathbb{Z}^\natural,E)\,.$$

Ainsi la restriction à H_{II} du bord d_1^t est nulle et $H_I H_{II} = H_{II}$. Le calcul de la différentielle, de degré $(2, -1)$, du terme E_2 de la suite spectrale associée à la première filtration donne naissance à un opérateur:

$$B : \mathrm{Ext}^n_\Delta(\mathbb{Z}^\natural, E) \to \mathrm{Ext}^{n-1}_\Lambda(\mathbb{Z}^\natural, E)\,.$$

A tout cocycle $\varphi \in \mathrm{Hom}_\Delta(P^m, E) = E_m = \mathrm{Hom}_\Lambda(C^m E)$, l'opérateur B associe le cocycle $(\psi_{i,j})$ du bicomplexe $X^{n,m} = \mathrm{Hom}(C^{n,m}, E) = E^m$, tel que:

$$\psi_{(i,j)} = 0 \quad \text{pour} \quad (i,j) \neq (0, n-1) \quad \text{et} \quad \psi_{(0,n-1)} = A^t s^t D^t \varphi\,.$$

Le théorème 37 que nous avions obtenu dans [6] se reformule alors ainsi:

Théorème 12. *Pour tout Λ-module E on a un couple exact:*

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Ext}^*_\Delta(\mathbb{Z}^\natural, E) \arrow[dl, "B"'] & \\ \mathrm{Ext}^*_\Lambda(\mathbb{Z}^\natural, E) \arrow[rr, "S"] & & \mathrm{Ext}^*_\Lambda(\mathbb{Z}^\natural, E) \arrow[ul, "I"'] \end{tikzcd}$$

Références

[1] M.F. Atiyah, *Global Theory of Elliptic Operators* (*Proc. Inter. Conf. on Funct. Anal.*), University of Tokyo Press, Tokyo, 1970.

[2] L. Brown, R. Douglas et P. Fillmore, *Annals of Math.*, 105, (2), 1977, p. 265-324.

[3] H. Cartan et S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956.

[4] P. Cartier, *Structures simpliciales* (*Séminaire Bourbaki* 12ième Année, n° 199, 1959/1960).

[5] A. Connes, *Non Commutative Differential Geometry*, Part I, *The Chern Character in K-Homology*, Preprint I.H.E.S., 1982.

[6] A. Connes, *Non Commutative Differential Geometry*, Part II, *De Rham Homology and Non Commutative Algebra*, Preprint I.H.E.S., 1983.

[7] A. Grothendieck, *Théorie de la descente* (*Séminaire Bourbaki*, n° 195, 1959/1960).

[8] G.G. Kasparov, *Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R., Ser. Mat.*, n° 44, 1980, p. 571-636.

[9] J.-L. Loday et D. Quillen, *Comptes rendus*, 296, série I, 1983, p. 295.

[10] S. Mac Lane, *Homology*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963.

[11] D. Quillen, *Higher Algebraic K-Theory* I (*Lecture Notes in Math.*, n° 341).

[12] E. Spanier, *Algebraic Topology*, Mc Graw Hill.