Untersuchungen über quadratische Formen in Körpern der Charakteristik 2. (Teil I.)

Von *Cahit Arf* in Istanbul.

Einleitung.

Witt [1]) hat eine Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern k aufgestellt. Er setzt dabei jedoch voraus, daß k nicht die Charakteristik 2 hat. Dann ist jede quadratische Form in eine Diagonalform $F = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$ transformierbar. Unter Heranziehung eines durch F metrisierten Vektorraumes wird in W. Q. bewiesen, daß die Algebra $\prod_{i \leqq j} (a_i, a_j)$ und die Zahlklasse $\prod_i a_i k^2$ Invarianten der Form F sind, und daß diese Invarianten zusammen mit n für spezielle Körper k die Form F bis auf äquivalente charakterisieren.

Wir wollen in diesem ersten Teil mittels ähnlicher Methoden wie in W. Q. den dort nicht betrachteten Fall untersuchen, daß k die Charakteristik 2 hat. Das Ergebnis dieser Untersuchung soll dann in einem zweiten Teil angewendet werden auf die Aufstellung der Invarianten für die arithmetische Äquivalenz der binären, ternären und quaternären Formen in einem Potenzreihenkörper mit Koeffizienten aus einem vollkommenem Körper der Charakteristik 2.

Die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich H. Hasse [2]).

I. Quadratische Formen in Körpern der Charakteristik 2.

Wir legen einen festen Körper k der Charakteristik 2 als Grundkörper zugrunde und betrachten quadratische Formen

$$F = \sum_{1 \leqq i \leqq j \leqq m} a_{ij} x_i x_j$$

mit Koeffizienten a_{ij} aus k.

Wie in W. Q. ordnen wir einer quadratischen Form F einen durch sie metrisierten Vektorraum

$$\mathfrak{R} = \sum_{i=1}^{m} k\,\mathfrak{u}_i = \langle \mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_m \rangle$$

über k zu, indem wir das Längenquadrat eines Vektors

$$\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i \mathfrak{u}_i$$

aus $\mathfrak{R}$ durch

---

[1]) E. Witt, Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern. Dieses Journal **176** (1937), 31—44; im folgenden mit W. Q. zitiert.

[2]) Anmerkung des Herausgebers: Im Einverständnis mit dem Verfasser habe ich dessen ursprüngliches Ms. überarbeitet.

$$|\mathfrak{x}|^2 = F(\mathfrak{x})$$

definieren. Eine Äquivalenz $F \simeq F'$ zwischen zwei Formen F und F' drückt sich dann durch die Isomorphie $\mathfrak{R} \simeq \mathfrak{R}'$ der zugeordneten metrischen Räume aus, also durch eine umkehrbar eindeutige lineare längentreue Zuordnung zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$. Die verschiedenen zu F äquivalenten Formen entsprechen umkehrbar eindeutig den verschiedenen Basen von $\mathfrak{R}$.

Für zwei Vektoren

$$\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i \mathfrak{u}_i, \quad \mathfrak{y} = \sum_{i=1}^{m} y_i \mathfrak{u}_i$$

aus $\mathfrak{R}$ definieren wir das skalare Produkt durch die Beziehung

$$|\mathfrak{x} + \mathfrak{y}|^2 = |\mathfrak{x}|^2 + |\mathfrak{y}|^2 + \mathfrak{x}\mathfrak{y},$$

also als die Bilinearform

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{1 \leq i < j \leq m} a_{ij}(x_i y_j + x_j y_i).$$

Ist $\mathfrak{x}\mathfrak{y} = 0$, so sagen wir, $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ sind senkrecht zueinander. Ist $\mathfrak{r}$ ein Teilraum von $\mathfrak{R}$, und ist $\mathfrak{y}$ senkrecht zu allen $\mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{r}$, so nennen wir $\mathfrak{y}$ senkrecht zu $\mathfrak{r}$. Mit $\mathfrak{r}^*$ bezeichnen wir den Teilraum aller zu $\mathfrak{r}$ senkrechten Vektoren aus $\mathfrak{R}$. Ist $\mathfrak{s}$ ein weiterer Teilraum von $\mathfrak{R}$, und sind alle $\mathfrak{y}$ aus $\mathfrak{s}$ senkrecht zu $\mathfrak{r}$, so sagen wir, $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ sind senkrecht zueinander. Unter einer *direkten Zerlegung* $\mathfrak{R} = \mathfrak{r} + \mathfrak{s}$ verstehen wir eine Zerlegung von $\mathfrak{R}$ in zwei zueinander fremde und zueinander senkrechte Teilräume $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$. Ihr entspricht eine Darstellung $F = f + g$ als Summe zweier Formen f und g in untereinander verschiedenen Variablen. Wir verwenden das Pluszeichen bei Räumen und Formen nur im Sinne dieser direkten Zerlegung.

Durch $\mathfrak{R}$ ist invariant der Teilraum $\mathfrak{R}^*$ aller zu dem vollen Raum $\mathfrak{R}$ senkrechten Vektoren aus $\mathfrak{R}$ bestimmt. Er zerfällt direkt in eindimensionale Teilräume:

$$\mathfrak{R}^* = \sum_{j=1}^{n^*} \langle \mathfrak{w}_j \rangle.$$

Ist $\mathfrak{R}^* = 0$, so nennen wir $\mathfrak{R}$ und die zugehörigen Formen *vollregulär*. Es gilt nun weiter:

Satz 1. *Der Raum $\mathfrak{R}$ zerfällt direkt in zweidimensionale vollreguläre Teilräume und $\mathfrak{R}^*$:*

$$\mathfrak{R} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathfrak{u}_i, \mathfrak{v}_i \rangle + \mathfrak{R}^* \quad \textit{mit} \quad \mathfrak{u}_i \mathfrak{v}_i \neq 0.$$

Beweis. Ist $\mathfrak{u}_1$ ein nicht zu $\mathfrak{R}^*$ gehöriger Vektor aus $\mathfrak{R}$, so gibt es in $\mathfrak{R}$ einen Vektor $\mathfrak{v}_1$ mit $\mathfrak{u}_1\mathfrak{v}_1 \neq 0$. Da $\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_1 = 0$, $\mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_1 = 0$, sind dann $\mathfrak{u}_1$ und $\mathfrak{v}_1$ linear unabhängig, und jeder Vektor $\mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{R}$ besitzt eine eindeutige Zerlegung

$$\mathfrak{x} = (\alpha_1 \mathfrak{u}_1 + \beta_1 \mathfrak{v}_1) + \mathfrak{x}_1, \quad \mathfrak{x}_1 \text{ in } \langle \mathfrak{u}_1\ \mathfrak{v}_1 \rangle^*,$$

nämlich mit

$$\alpha_1 = \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{v}_1}{\mathfrak{u}_1\mathfrak{v}_1}, \quad \beta_1 = \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{u}_1}{\mathfrak{u}_1\mathfrak{v}_1}.$$

Somit ist

$$\mathfrak{R} = \langle \mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1) + \langle \mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1 \rangle^*.$$

Ist $\langle \mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1 \rangle^*$ noch umfassender als $\mathfrak{R}^*$, so kann man auf $\langle \mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1 \rangle^*$ statt $\mathfrak{R}$ dieselbe Schlußweise anwenden. So ergibt sich schließlich die Behauptung.

Zusatz. *Ist $\mathfrak{r}$ ein vollregulärer Teilraum von $\mathfrak{R}$, so ist*

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{r} + \mathfrak{r}^*.$$

Nach dem Verfahren des eben geführten Beweises kann man nämlich eine direkte Zerlegung

$$\mathfrak{r} = \sum_{i=1}^{r} \langle \mathfrak{u}_i, \mathfrak{v}_i \rangle \quad \text{mit} \quad \mathfrak{u}_i \mathfrak{v}_i \neq 0$$

zu einer direkten Zerlegung der obigen Form von $\mathfrak{R}$ ausbauen, und dabei erzeugen die hinzukommenden Teilräume gerade $\mathfrak{r}^*$.

Aus Satz 1 und der Bemerkung davor folgt unmittelbar:

Satz 2. *Jede quadratische Form ist in die Gestalt*

$$F = \sum_{i=1}^{n} (a_i x_i^2 + b_i x_i y_i + c_i y_i^2) + \sum_{j=1}^{n^*} d_j z_j^2 \quad \textit{mit} \quad b_i \neq 0$$

transformierbar. Dabei ist die Form

$$F^* = \sum_{j=1}^{n^*} d_j z_j^2$$

durch F bis auf äquivalente eindeutig bestimmt.

Der Zusammenhang der Normalform von Satz 2 mit der Zerlegung von Satz 1 wird durch die Formeln

$$|\mathfrak{u}_i|^2 = a_i, \quad \mathfrak{u}_i \mathfrak{v}_i = b_i, \quad |\mathfrak{v}_i|^2 = c_i; \quad |\mathfrak{w}_j|^2 = d_j$$

gegeben. Wir nennen eine Form F von dieser Gestalt *quasidiagonal*. Die Quasidiagonalformen übernehmen hier die Rolle der Diagonalformen in W. Q. Die invariante Teilform F^* nennen wir den *quasilinearen Teil* von F; er ist das Längenquadrat im invarianten Teilraum $\mathfrak{R}^*$ von $\mathfrak{R}$. Der vollreguläre Teil von F ist nicht invariant, wohl aber seine Variablenanzahl $2n$. Bei vollregulären Formen fehlt der quasilineare Teil, und die Variablenanzahl $2n$ ist gerade.

Die Vektoren vom Längenquadrat 0 aus $\mathfrak{R}^*$ bilden einen Teilraum $\mathfrak{R}_0^*$ von $\mathfrak{R}^*$. Ist $\mathfrak{R}_0^* = 0$, so nennen wir $\mathfrak{R}$ und die zugehörigen Formen *regulär*. Wählt man eine Basis von $\mathfrak{R}$ so, daß darin eine Basis von $\mathfrak{R}_0^*$ enthalten ist, so erkennt man, daß jede quadratische Form in eine reguläre Form von ev. kleinerer Variablenanzahl transformierbar ist. Wir können daher im folgenden durchweg ohne Einschränkung die zu betrachtenden Formen als regulär voraussetzen. In der Quasidiagonalform sind dann die $d_j \neq 0$ und bilden eine Basis des Moduls $\sum_{j=1}^{n^*} d_j k^2$. Dieser Modul ist ein durch Quadratbildung entstehendes isomorphes Bild von $\mathfrak{R}^* = \sum_{j=1}^{n^*} k\mathfrak{w}_j$, er besteht aus den durch die Form F^* darstellbaren Elementen aus k. Die Beschränkung auf reguläre Formen tritt an die Stelle der Beschränkung auf Formen von Null verschiedener Diskriminante in W. Q.

Die Nulldarstellungen durch F entsprechen den Vektoren $\neq 0$ vom Längenquadrat 0 aus $\mathfrak{R}$. Stellt eine reguläre Form die Null dar, so sind dabei nicht alle Variablen des vollregulären Teils Null.

Um zu weiteren Invarianten zu gelangen, betrachten wir wie in W. Q. das der Form

$$F = \sum_{1 \leq i \leq j \leq m} a_{ij} x_i x_j$$

invariant zugeordnete Cliffordsche System

$$C(F) = \sum_{e_1, \ldots, e_m = 0, 1} k u_1^{e_1} \cdots u_m^{e_m}$$

mit der Multiplikationstafel

$$u_i^2 = a_{ii}, \quad u_i u_j + u_j u_i = a_{ij} \qquad (i < j).$$

$C(F)$ ist eine Algebra vom Rang 2^m über k. Es ist

$$F = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i u_i\right)^2.$$

Um zu einer direkten Zerlegung in normale einfache Algebren vom Rang 4 zu gelangen, mußte Witt in W. Q. der Form F anstelle von $C(F)$ die Algebra $C\left(F - \sum_{i=1}^{m} y_i^2\right)$ zuordnen. Das ist in unserem Falle nicht nötig. Vielmehr entspricht hier jeder quasidiagonalen Darstellung

$$F \simeq \sum_{i=1}^{n} f_i + F^*,$$

$$f_i = a_i x_i^2 + b_i x_i y_i + c_i y_i^2, \quad F^* = \sum_{j=1}^{n^*} d_j z_j^2$$

eine direkte Zerlegung von $C(F)$ selbst:

$$C(F) = \prod_{i=1}^{n} C(f_i) \cdot C(F^*).$$

Dabei ist

$$C(F^*) = \prod_{j=1}^{n^*} C(d_j z_j^2)$$

das Zentrum von $C(F)$.

$C(F^*)$ wird durch n^* Elemente w_j mit $w_j^2 = d_j$ erzeugt. Kommt in dem Modul $\sum_{j=1}^{n^*} d_j k^2$ der durch F^* darstellbaren Elemente aus k die 1 nicht vor, so ist $C(F^*)$ das direkte Produkt der n^* unabhängigen inseparablen quadratischen Körper $k(\sqrt{d_j})$, oder also, invariant beschrieben, der Körper $k(\sqrt{F^*})$ vom Grade 2^{n^*}, der durch Adjunktion der Quadratwurzeln aus den durch F^* darstellbaren Elementen aus k erzeugt wird. Dann ist also

$$C(F) = \prod_{i=1}^{n^*} C(f_i) \cdot k(\sqrt{F^*}).$$

Gibt es aber eine Darstellung $\sum_{j=1}^{n^*} d_j \gamma_j^2 = 1$, so entspricht ihr ein Element $w = 1 + \sum_{j=1}^{n^*} \gamma_j w_j$ aus $C(F^*)$ mit $w^2 = 0$. Dann ist $C(F^*)$ das direkte Produkt des Körpers $k(\sqrt{F^*})$, der jetzt nur den Grad 2^{n^*-1} hat, mit der durch w erzeugten Algebra $k + kw$ vom Rang 2. Dabei erzeugt w das Radikal $C(F^*)w = k(\sqrt{F^*})w$ von $C(F^*)$, und da die $C(f_i)$, wie wir gleich sehen werden, normale einfache Algebren sind, auch das Radikal $C(F)w = \prod_{i=1}^{n} C(f_i) \cdot k(\sqrt{F^*})w$ von $C(F)$. Läßt man den Fakter $k + kw$ aus dem direkten Produkt $C(F)$ fort, so entspricht das also der Reduktion der Algebra $C(F)$ auf die Restklassenalgebra nach ihrem Radikal. Da dies ein invarianter Prozeß ist, ist in dem betrachteten Falle auch die so entstehende Algebra

$$C_0(F) = \prod_{i=1}^{n} C(f_i) \cdot k(\sqrt{F^*})$$

eine Invariante der Form F.

Hierdurch wird man auf die Betrachtung der Invariante $C(F)$ für vollreguläre

$$F \simeq \sum_{i=1}^{n} f_i$$

zurückgeführt. Dann ist

$$C(F) = \prod_{i=1}^{n} C(f_i).$$

Für eine vollreguläre binäre Form

$$f = ax^2 + bxy + cy^2$$

ist $C(f)$ eine normale einfache Algebra vom Rang 4, erzeugt durch zwei Elemente u, v mit den Relationen

$$u^2 = a, \quad uv + vu = b, \quad v^2 = c.$$

Um $C(f)$ als verschränktes Produkt darzustellen, setze man ohne Einschränkung $a \neq 0$ voraus, was ja durch eine der beiden Transformationen $x' = y$, $y' = x$ oder $x' = x$, $y' = x + y$ erreichbar ist. Dann kann man als Erzeugende auch

$$\omega = \frac{uv}{b}, \quad \theta = u$$

nehmen, mit den Relationen

$$\wp\omega = \frac{ac}{b^2}, \quad \theta\omega\theta^{-1} = \omega + 1, \quad \theta^2 = a.$$

Dabei ist zur Abkürzung $\wp\omega = \omega^2 + \omega$ gesetzt; wir schreiben ferner umgekehrt $\omega = \frac{ac}{b^2}/\wp$ für eine Wurzel von $\wp\omega = \frac{ac}{b^2}$. Hiernach ist $C(f)$ ein verschränktes Produkt mit dem separablen Körper $k\left(\frac{ac}{b^2}/\wp\right)$ als Zerfällungskörper. Die für diesen Zerfällungskörper charakteristische additive Klasse $\frac{ac}{b^2} + \wp\alpha$, wo α die Elemente aus k durchläuft, bezeichnen wir mit $\Delta(f)$ und schreiben auch kurz

$$\Delta(f) \equiv \frac{ac}{b^2} \quad \text{mod. } \wp k.$$

Ferner setzen wir zunächst formal

$$\Delta(F) \equiv \sum_{i=1}^{n} \Delta(f_i) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i c_i}{b_i^2} \quad \text{mod. } \wp k.$$

Wir werden beweisen, daß $\Delta(F)$ eine Invariante von F ist. Schließlich schreiben wir

$$N(x + y\omega) = (x + y\omega)(x + y(\omega + 1)) = x^2 + xy + \frac{ac}{b^2} y^2.$$

Es ist das die Norm im Zerfällungskörper $k\left(\frac{ac}{b^2}/\wp\right)$ von $C(f)$, wobei dieser aber, auch falls $\frac{ac}{b^2}/\wp$ in k liegt, als die Algebra $k + k\omega$, also dann als die direkte Summe zweier Exemplare von k aufgefaßt wird.

Satz 3. *Zwei vollreguläre binäre Formen*

$$F = ax^2 + bxy + cy^2, \quad F' = a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2$$

sind dann und nur dann äquivalent, wenn

$$C(F) \simeq C(F')$$

und

$$\Delta(F) \equiv \Delta(F') \quad \text{mod. } \wp k$$

ist.

Beweis. Man kann ohne Einschränkung $a \neq 0$, $a' \neq 0$ voraussetzen. Dann hat man

$$F = aN\left(x + \frac{b}{a}y\omega\right) \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{ac}{b^2}/\wp,$$

$$F' = a'N\left(x' + \frac{b'}{a'}y'\omega'\right) \quad \text{mit} \quad \omega' = \frac{a'c'}{b'^2}/\wp.$$

Die Notwendigkeit der ersten Bedingung ist klar. Die Notwendigkeit der zweiten Bedingung ergibt sich daraus, daß für äquivalente F und F' die inhomogenen Nullstellen ω und ω' denselben Erweiterungskörper von k erzeugen.

Seien jetzt die beiden Bedingungen erfüllt. Nach der zweiten ist dann

$$\omega' = \omega + \varrho \quad \text{mit} \quad \varrho \text{ in } k$$

und nach der ersten bekanntlich

$$a' = aN(\alpha + \beta\omega) \quad \text{mit} \quad \alpha, \beta \text{ in } k.$$

Daraus folgt

$$F' = aN(\alpha + \beta\omega)\, N\left(x' + \frac{b'}{a'}y'(\omega + \varrho)\right)$$

$$= aN\left[\left(\alpha x' + \frac{b'}{a'}\left(\frac{ac}{b^2}\beta + \varrho\alpha\right)y'\right) + \left(\beta x' + \frac{b'}{a'}(\alpha + \beta + \varrho\beta)y'\right)\omega\right].$$

Hiernach geht F durch die Transformation

$$x = \alpha x' + \frac{b'}{a'}\left(\frac{ac}{b^2}\beta + \varrho\alpha\right)y'$$

$$\frac{b}{a}y = \beta x' + \frac{b'}{a'}(\alpha + (\varrho + 1)\beta)y'$$

in F' über. Damit ist Satz 3 bewiesen. Aus dem Beweis entnimmt man noch:

Zusatz 1. *Ist $a = a'$, so ist für die Äquivalenz die Bedingung $\Delta(F) \equiv \Delta(F')$ mod. $\wp k$ notwendig und hinreichend.*

Zusatz 2. *Für die spezielle Äquivalenz $F \simeq xy$ ist schon die Bedingung $\Delta(F) \equiv 0$ mod. $\wp k$ notwendig und hinreichend, und es ist dann $C(F) \sim 1$.*

Dabei bezeichnet $C(F) \sim 1$ wie üblich, daß $C(F)$ zerfällt.

Satz 4. *Für die Äquivalenz der vollregulären quaternären Formen*

$$F = (a_1x_1^2 + b_1x_1y_1 + c_1y_1^2) + (a_2x_2^2 + b_2x_2y_2 + c_2y_2^2)$$

ist neben der Algebra $C(F)$ auch die Klasse

$$\Delta(F) \equiv \frac{a_1c_1}{b_1^2} + \frac{a_2c_2}{b_2^2} \quad \text{mod. } \wp k$$

eine Invariante.

Beweis. Es sei $\mathfrak{R}$ der zu F gehörige vollreguläre Vektorraum und

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{r} + \mathfrak{r}^*$$

seine direkte Zerlegung in zwei vollreguläre Teilräume

$$\mathfrak{r} = \langle \mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1 \rangle, \quad \mathfrak{r}^* = \langle \mathfrak{u}_2, \mathfrak{v}_2 \rangle$$

mit

$$|\mathfrak{u}_1|^2 = a_1, \quad \mathfrak{u}_1\mathfrak{v}_1 = b_1, \quad |\mathfrak{v}_1|^2 = c_1; \quad |\mathfrak{u}_2|^2 = a_2, \quad \mathfrak{u}_2\mathfrak{v}_2 = b_2, \quad |\mathfrak{v}_2|^2 = c_2.$$

Wir haben zu zeigen, daß die Klasse $\frac{a_1c_1}{b_1^2} + \frac{a_2c_2}{b_2^2}$ mod. $\wp k$ nur von $\mathfrak{R}$, nicht von der Zerlegung abhängt. Da nach Satz 3 die Klassen $\frac{a_1c_1}{b_1^2}$ mod. $\wp k$ und $\frac{a_2c_2}{b_2^2}$ mod. $\wp k$ nicht von der Wahl der Basen $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{v}_2$ von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}^*$ abhängen, können wir diese Basen zum Beweis in geeigneter Weise festlegen. Es sei nun

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{r}' + \mathfrak{r}'^*$$

eine andere Zerlegung der betrachteten Art, wobei ohne Einschränkung $\mathfrak{r}'$ von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}^*$ verschieden sei. Dann können wir die Basen von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}^*$ so festlegen, daß $\mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2$ in $\mathfrak{r}'$ liegt. Setzt man dann

$$(1) \quad \begin{cases} \bar{\mathfrak{u}}_1 = \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2, & \bar{\mathfrak{u}}_2 = \mathfrak{u}_2, \\ \bar{\mathfrak{v}}_1 = \mathfrak{v}_1, & \bar{\mathfrak{v}}_2 = \mathfrak{v}_2 + \frac{b_2}{b_1}\mathfrak{v}_1, \end{cases}$$

so erhält man eine weitere Zerlegung

$$\mathfrak{R} = \bar{\mathfrak{r}} + \bar{\mathfrak{r}}^*$$

der betrachteten Art, mit

$$\bar{\mathfrak{r}} = \langle \bar{\mathfrak{u}}_1, \bar{\mathfrak{v}}_1 \rangle, \qquad \bar{\mathfrak{r}}^* = \langle \bar{\mathfrak{u}}_2, \bar{\mathfrak{v}}_2 \rangle,$$

bei der der Teilraum $\bar{\mathfrak{r}}$ mit $\mathfrak{r}$ noch das Element $\bar{\mathfrak{v}}_1$ und mit $\bar{\mathfrak{r}}'$ schon das Element $\bar{\mathfrak{u}}_1$ gemeinsam hat. Aus (1) folgt

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= |\bar{\mathfrak{u}}_1|^2 = a_1 + a_2, & \bar{a}_2 &= |\bar{\mathfrak{u}}_2|^2 = a_2, \\ \bar{b}_1 &= \bar{\mathfrak{u}}_1\bar{\mathfrak{v}}_1 = b_1, & \bar{b}_2 &= \bar{\mathfrak{u}}_2\bar{\mathfrak{v}}_2 = b_2, \\ \bar{c}_1 &= |\bar{\mathfrak{v}}_1|^2 = c_1, & \bar{c}_2 &= |\bar{\mathfrak{v}}_2|^2 = c_2 + \frac{b_2^2}{b_1^2}c_1. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\bar{a}_1\bar{c}_1}{\bar{b}_1^2} + \frac{\bar{a}_2\bar{c}_2}{\bar{b}_2^2} = \frac{a_1c_1}{b_1^2} + \frac{a_2c_1}{b_1^2} + \frac{a_2c_2}{b_2^2} + \frac{b_2^2}{b_1^2}\frac{a_2c_1}{b_2^2} = \frac{a_1c_1}{b_1^2} + \frac{a_2c_2}{b_2^2},$$

also die Behauptung für den Übergang von $\mathfrak{R} = \mathfrak{r} + \mathfrak{r}^*$ zu $\mathfrak{R} = \bar{\mathfrak{r}} + \bar{\mathfrak{r}}^*$. Ist nun $\mathfrak{r}'$ noch von $\bar{\mathfrak{r}}$ verschieden, so kann man unter Festhaltung des bereits in $\mathfrak{r}'$ gelegenen $\bar{\mathfrak{u}}_1$ die übrigen Basiselemente $\bar{\mathfrak{v}}_1$, $\bar{\mathfrak{u}}_2$, $\bar{\mathfrak{v}}_2$ von $\bar{\mathfrak{r}}$ und $\bar{\mathfrak{r}}^*$ neu so wählen, daß auch $\bar{\mathfrak{v}}_1 + \bar{\mathfrak{v}}_2$ in $\mathfrak{r}'$ liegt. Dann erhält man in der Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}_1' &= \bar{\mathfrak{u}}_1, & \mathfrak{u}_2' &= \bar{\mathfrak{u}}_2 + \frac{\bar{b}_2}{\bar{b}_1}\bar{\mathfrak{u}}_1, \\ \mathfrak{v}_1' &= \bar{\mathfrak{v}}_1 + \bar{\mathfrak{v}}_2, & \mathfrak{v}_1' &= \bar{\mathfrak{v}}_2. \end{aligned}$$

Basen von $\mathfrak{r}'$ und $\mathfrak{r}'^*$. Hieraus ergibt sich entsprechend wie vorher die Behauptung für den Übergang von $\mathfrak{R} = \bar{\mathfrak{r}} + \bar{\mathfrak{r}}^*$ zu $\mathfrak{R} = \mathfrak{r}' + \mathfrak{r}'^*$. Damit ist Satz 4 bewiesen.

Satz 5. *Für die Äquivalenz der allgemeinen vollregulären quadratischen Formen*

$$F \cong \sum_{i=1}^{n} (a_i x_i^2 + b_i x_i y_i + c_i y_i^2)$$

ist neben der Algebra $C(F)$ auch die Klasse

$$\Delta(F) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i c_i}{b_i^2} \quad \text{mod. } \wp k$$

eine Invariante.

Beweis. Es sei $\mathfrak{R}$ der zu F gehörige vollreguläre Vektorraum und

$$\mathfrak{R} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathfrak{u}_i, \mathfrak{v}_i \rangle$$

seine direkte Zerlegung in n vollreguläre Teilräume mit

$$|\,\mathfrak{u}_i\,|^2 = a_i, \quad \mathfrak{u}_i\mathfrak{v}_i = b_i, \quad |\,\mathfrak{v}_i\,|^2 = c_i.$$

Wir haben zu zeigen, daß die Klasse $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i c_i}{b_i^2}$ mod. $\wp k$ nur von $\mathfrak{R}$, nicht von der Zerlegung abhängt. Für $n = 1, 2$ stimmt das nach Satz 3, 4. Für $n \geqq 3$ verwenden wir vollständige Induktion. Es sei

$$\mathfrak{R} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathfrak{u}'_i, \mathfrak{v}'_i \rangle$$

mit

$$|\,\mathfrak{u}'_i\,|^2 = a'_i, \quad \mathfrak{u}'_i\mathfrak{v}'_i = b'_i, \quad |\,\mathfrak{v}'_i\,|^2 = c'_i$$

eine weitere Zerlegung der betrachteten Art. Wir betrachten dann den Teilraum

$$\mathfrak{r} = \langle \mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{u}'_1, \mathfrak{v}'_1 \rangle$$

von $\mathfrak{R}$ und haben folgende vier Fälle zu unterscheiden:

a) $\mathfrak{r}$ ist zweidimensional,
b) $\mathfrak{r}$ ist dreidimensional,
c) $\mathfrak{r}$ ist vierdimensional und vollregulär,
d) $\mathfrak{r}$ ist vierdimensional, aber nicht vollregulär.

a) Ist $\mathfrak{r}$ zweidimensional, so ist

$$\mathfrak{r} = \langle \mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1 \rangle = \langle \mathfrak{u}'_1, \mathfrak{v}'_1 \rangle$$

und folglich

$$\mathfrak{r}^* = \sum_{i=2}^{n} \langle \mathfrak{u}_i, \mathfrak{v}_i \rangle = \sum_{i=2}^{n} \langle \mathfrak{u}'_i, \mathfrak{v}'_i \rangle.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung nach Satz 3 und der Induktionsannahme.

b) Ist $\mathfrak{r}$ dreidimensional, so gibt es in $\mathfrak{r}$ einen von $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1$ linear unabhängigen Vektor $\mathfrak{u}$; dieser kann zu $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1$ senkrecht normiert werden. Man hat dann die direkte Zerlegung

$$\mathfrak{r} = \langle \mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1 \rangle + \langle \mathfrak{u} \rangle.$$

Da $\mathfrak{R}$ vollregulär ist, gibt es ferner in $\mathfrak{R}$ einen zu $\mathfrak{u}$ nicht senkrechten Vektor $\mathfrak{v}$; dieser kann ebenfalls zu $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1$ senkrecht normiert werden. Damit ist $\mathfrak{r}$ in einen vollregulären vierdimensionalen Teilraum

$$\bar{\mathfrak{r}} = \langle \mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1 \rangle + \langle \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \rangle$$

von $\mathfrak{R}$ eingebettet. Nach dem Zusatz zu Satz 1 besitzt dieser auch eine direkte Zerlegung

$$\bar{\mathfrak{r}} = \langle \mathfrak{u}'_1, \mathfrak{v}'_1 \rangle + \langle \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle,$$

wo $\langle \mathfrak{u}'; \mathfrak{v}' \rangle$ ein weiterer vollregulärer Teilraum ist. Da die Summen $\sum_{i=2}^{n} \frac{a_i c_i}{b_i^2}$ mod. $\wp k$ und $\sum_{i=2}^{n} \frac{a'_i c'_i}{b_i'^2}$ mod. $\wp k$ nach der Induktionsannahme nicht von der Basiswahl in $\sum_{i=2}^{n} \langle \mathfrak{u}_i, \mathfrak{v}_i \rangle$ und $\sum_{i=2}^{n} \langle \mathfrak{u}'_i, \mathfrak{v}'_i \rangle$ abhängen, können wir

$$\mathfrak{u}_2 = \mathfrak{u}, \quad \mathfrak{v}_2 = \mathfrak{v} \quad \text{und} \quad \mathfrak{u}_2' = \mathfrak{u}', \quad \mathfrak{v}_2' = \mathfrak{v}'$$

annehmen. Dann ist

$$\bar{\mathfrak{r}} = \langle \mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1 \rangle + \langle \mathfrak{u}_2, \mathfrak{v}_2 \rangle = \langle \mathfrak{u}_1', \mathfrak{v}_1' \rangle + \langle \mathfrak{u}_2', \mathfrak{v}_2' \rangle$$

und folglich

$$\bar{\mathfrak{r}}^* = \sum_{i=3}^{n} \langle \mathfrak{u}_i, \mathfrak{v}_i \rangle = \sum_{i=3}^{n} \langle \mathfrak{u}_i', \mathfrak{v}_i' \rangle.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung nach Satz 4 und der Induktionsannahme.

c) Ist $\mathfrak{r}$ vierdimensional und vollregulär, so schließt man wie eben, indem man den Vektor $\mathfrak{v}$ in $\mathfrak{r}$ wählt; es wird dann $\bar{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}$.

d) Ist $\mathfrak{r}$ vierdimensional, aber nicht vollregulär, so gibt es in $\mathfrak{r}$ einen von $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1$ linear unabhängigen zu $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1$ senkrechten Vektor $\mathfrak{u}$, und ferner einen von $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{u}$ linear unabhängigen zu $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1$ senkrechten Vektor $\bar{\mathfrak{v}}$; dieser ist notwendig auch zu $\mathfrak{u}$ senkrecht, weil $\mathfrak{r}$ nicht vollregulär ist. Man hat dann die direkte Zerlegung

$$\mathfrak{r} = \langle \mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1 \rangle + \langle \mathfrak{u} \rangle + \langle \bar{\mathfrak{v}} \rangle.$$

Ähnlich wie vorher kann man weiter $\mathfrak{r}$ durch geeignete Wahl zweier Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{u}}$ aus $\mathfrak{R}$ in einen vollregulären sechsdimensionalen Teilraum

$$\bar{\mathfrak{r}} = \langle \mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1 \rangle + \langle \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \rangle + \langle \bar{\mathfrak{u}}, \bar{\mathfrak{v}} \rangle$$

von $\mathfrak{R}$ einbetten. Für die Vektoren $\mathfrak{u}_1', \mathfrak{v}_1'$ aus $\mathfrak{r}$ bestehen Darstellungen

$$\mathfrak{u}_1' = \alpha_1 \mathfrak{u}_1 + \beta_1 \mathfrak{v}_1 + \alpha \mathfrak{u} + \beta \bar{\mathfrak{v}}$$
$$\mathfrak{v}_1' = \gamma_1 \mathfrak{u}_1 + \delta_1 \mathfrak{v}_1 + \gamma \mathfrak{u} + \delta \bar{\mathfrak{v}}.$$

Dabei ist $\alpha_1\delta_1 + \beta_1\gamma_1 \neq 0$, weil $\mathfrak{u}_1'\mathfrak{v}_1' \neq 0$ ist, und $\alpha\delta + \beta\gamma \neq 0$, weil $\mathfrak{r} = \langle \mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{u}_1', \mathfrak{v}_1' \rangle$ vierdimensional ist. Man kann daher $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{u}, \bar{\mathfrak{v}}$ so gewählt annehmen, daß einfacher

$$\mathfrak{u}_1' = \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}, \quad \mathfrak{v}_1' = \mathfrak{v}_1 + \bar{\mathfrak{v}} \tag{2}$$

gilt. Setzt man ferner

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathfrak{u}' = \mathfrak{u}, & \mathfrak{v}' = \mathfrak{v} + \dfrac{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}{b_1} \mathfrak{v}_1, \\ \bar{\mathfrak{u}}' = \bar{\mathfrak{u}} + \dfrac{\bar{\mathfrak{u}}\bar{\mathfrak{v}}}{b_1} (\mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}), & \bar{\mathfrak{v}}' = \bar{\mathfrak{v}}, \end{array} \right. \tag{3}$$

so erhält man für $\bar{\mathfrak{r}}$ die weitere direkte Zerlegung

$$\bar{\mathfrak{r}} = \langle \mathfrak{u}_1', \mathfrak{v}_1' \rangle + \langle \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle + \langle \bar{\mathfrak{u}}_1', \bar{\mathfrak{v}}' \rangle$$

in vollreguläre Teilräume. Auf Grund der Induktionsannahme können wir

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{u}_2 = \mathfrak{u}, \quad \mathfrak{v}_2 = \mathfrak{v}; \quad \mathfrak{u}_3 = \bar{\mathfrak{u}}, \quad \mathfrak{v}_3 = \bar{\mathfrak{v}} \\ \mathfrak{u}_2' = \mathfrak{u}', \quad \mathfrak{v}_2' = \mathfrak{v}'; \quad \mathfrak{u}_3' = \bar{\mathfrak{u}}', \quad \mathfrak{v}_3' = \bar{\mathfrak{v}}' \end{array} \right. \tag{4}$$

annehmen. Dann ist

$$\bar{\mathfrak{r}} = \sum_{i=1}^{3} \langle \mathfrak{u}_i, \mathfrak{v}_i \rangle = \sum_{i=1}^{3} \langle \mathfrak{u}_i', \mathfrak{v}_i' \rangle$$

und folglich

$$\bar{\mathfrak{r}}^* = \sum_{i=4}^{n} \langle \mathfrak{u}_i, \mathfrak{v}_i \rangle = \sum_{i=4}^{n} \langle \mathfrak{u}_i', \mathfrak{v}_i' \rangle.$$

Da auf die letztere Beziehung wieder die Induktionsannahme anwendbar ist, genügt es aus der ersteren die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{a_i c_i}{b_i^2} = \sum_{i=1}^{3} \frac{a_i' c_i'}{b_i'^2}$$

zu folgern. Nach (2), (3), (4) ist nun

$$\frac{a_1' c_1'}{b_1'^2} = \frac{(a_1 + a_2)(c_1 + c_3)}{b_1^2} = \frac{a_1 c_1}{b_1^2} + \frac{a_2 c_1}{b_1^2} + \frac{a_1 c_3}{b_1^2} + \frac{a_2 c_3}{b_1^2}$$

$$\frac{a_2' c_2'}{b_2'^2} = \frac{a_2\left(c_2 + \frac{b_2^2}{b_1^2} c_1\right)}{b_2^2} = \frac{a_2 c_2}{b_2^2} + \frac{a_2 c_1}{b_1^2}$$

$$\frac{a_3' c_3'}{b_3'^2} = \frac{\left(a_3 + \frac{b_3^2}{b_1^2}(a_1 + a_2)\right)c_3}{b_3^2} = \frac{a_3 c_3}{b_3^2} + \frac{a_1 c_3}{b_1^2} + \frac{a_2 c_3}{b_1^2},$$

woraus die behauptete Beziehung ersichtlich ist. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Satz 6. *Wenn die (reguläre) Form F die Null darstellt, so ist sie in die Gestalt $xy + f$ transformierbar. Dabei ist die Form f durch F bis auf äquivalente eindeutig bestimmt.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es in dem zu F gehörigen Vektorraum $\mathfrak{R}$ einen Vektor $\mathfrak{u} \neq 0$ mit $|\mathfrak{u}|^2 = 0$. Wegen der Regularität von $\mathfrak{R}$ ist $\mathfrak{u}$ nicht in $\mathfrak{R}^*$ enthalten. Daher gibt es in $\mathfrak{R}$ einen Vektor $\mathfrak{v}_0$ mit $\mathfrak{u}\mathfrak{v}_0 = 1$. Dann hat das Vektorpaar $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + |\mathfrak{v}_0|^2 \mathfrak{u}$ die Eigenschaften

$$|\mathfrak{u}|^2 = 0, \quad \mathfrak{u}\mathfrak{v} = 1, \quad |\mathfrak{v}|^2 = 0.$$

Der nach Satz 1 bestehenden direkten Zerlegung

$$\mathfrak{R} = \langle \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \rangle + \langle \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \rangle^*$$

entsprechend hat man dann

$$F = xy + f,$$

wobei f einer Basis von $\langle \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \rangle^*$ entspricht.

Es sei nun

$$\mathfrak{R} = \langle \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle + \langle \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle^*$$

eine weitere direkte Zerlegung mit

$$|\mathfrak{u}'|^2 = 0, \quad \mathfrak{u}'\mathfrak{v}' = 1, \quad |\mathfrak{v}'|^2 = 0$$

und entsprechend

$$F \cong x'y' + f',$$

wobei f' einer Basis von $\langle \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle^*$ entspricht. Wir haben zu zeigen, daß dann $f \cong f'$ oder also $\langle \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \rangle^* \cong \langle \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle^*$ gilt. Dazu betrachten wir den Teilraum

$$\mathfrak{r} = \langle \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle$$

von $\mathfrak{R}$.

Ist $\langle \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle$ in $\langle \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \rangle + \mathfrak{R}^*$ enthalten, so hat man

$$\mathfrak{u}' = \alpha\mathfrak{u} + \beta\mathfrak{v} + \mathfrak{w}$$

$$\mathfrak{v}' = \gamma\mathfrak{u} + \delta\mathfrak{v} + \mathfrak{z}$$

mit $\mathfrak{w}, \mathfrak{z}$ aus $\mathfrak{R}$. Dabei ist $1 = \mathfrak{u}'\mathfrak{v}' = (\alpha\delta + \beta\gamma)\mathfrak{u}\mathfrak{v} = \alpha\delta + \beta\gamma$. Daher ist dann auch $\langle \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \rangle$ in $\langle \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle + \mathfrak{R}^*$ enthalten. Somit ist in diesem Falle

$$\langle \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \rangle + \mathfrak{R}^* = \langle \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle + \mathfrak{R}^*.$$

Daraus folgt aber sogar $\langle\mathfrak{u}, \mathfrak{v}\rangle^* = \langle\mathfrak{u}', \mathfrak{v}'\rangle^*$.

Wir können demgemäß weiterhin voraussetzen, daß $\mathfrak{r}$ nicht in $\langle\mathfrak{u}, \mathfrak{v}\rangle + \mathfrak{R}^*$ enthalten ist, und haben dann folgende vier Fälle zu unterscheiden:

a) $\mathfrak{r}$ ist dreidimensional,
b) $\mathfrak{r}$ ist vierdimensional und vollregulär,
c) $\mathfrak{r}$ ist vierdimensional, nicht vollregulär und nicht fremd zu $\mathfrak{R}^*$,
d) $\mathfrak{r}$ ist vierdimensional, nicht vollregulär, aber fremd zu $\mathfrak{R}^*$.

a) Wenn $\mathfrak{r}$ dreidimensional ist, so ist

$$\mathfrak{r} = \langle\mathfrak{u}, \mathfrak{v}\rangle + \langle\bar{\mathfrak{u}}\rangle$$

mit nicht zu $\mathfrak{R}^*$ gehörigen $\bar{\mathfrak{u}}$, und man kann $\mathfrak{r}$ wie im Falle b) des vorigen Beweises in einen vollregulären vierdimensionalen Teilraum

$$\bar{\mathfrak{r}} = \langle\mathfrak{u}, \mathfrak{v}\rangle + \langle\bar{\mathfrak{u}}, \bar{\mathfrak{v}}\rangle$$

von $\mathfrak{R}$ einbetten. Nach dem Zusatz zu Satz 1 hat man dann auch

$$\bar{\mathfrak{r}} = \langle\mathfrak{u}', \mathfrak{v}'\rangle + \langle\bar{\mathfrak{u}}', \bar{\mathfrak{v}}'\rangle$$

mit einem weiteren vollregulären Teilraum $\langle\bar{\mathfrak{u}}', \bar{\mathfrak{v}}'\rangle$. Daraus folgt

$$\langle\mathfrak{u}, \mathfrak{v}\rangle^* = \langle\bar{\mathfrak{u}}, \bar{\mathfrak{v}}\rangle + \bar{\mathfrak{r}}^*, \quad \langle\mathfrak{u}', \mathfrak{v}'\rangle^* = \langle\bar{\mathfrak{u}}', \bar{\mathfrak{v}}'\rangle + \bar{\mathfrak{r}}^*,$$

so daß es genügt, $\langle\bar{\mathfrak{u}}, \bar{\mathfrak{v}}\rangle \cong \langle\bar{\mathfrak{u}}', \bar{\mathfrak{v}}'\rangle$ zu beweisen. Es ist das die Behauptung des Satzes für die $\bar{\mathfrak{r}}$ entsprechenden vollregulären quaternären Formen

$$\Phi = xy + \varphi, \quad \Phi' = x'y' + \varphi',$$

wo φ, φ' den Teilräumen $\langle\bar{\mathfrak{u}}, \bar{\mathfrak{v}}\rangle, \langle\bar{\mathfrak{u}}', \bar{\mathfrak{v}}'\rangle$ entsprechen. Nun ist

$$C(\Phi) = C(xy)C(\varphi) \sim C(\varphi), \qquad C(\Phi') = C(x'y')C(\varphi') \sim C(\varphi')$$
$$\Delta(\Phi) \equiv \Delta(xy) + \Delta(\varphi) \equiv \Delta(\varphi), \quad \Delta(\Phi') \equiv \Delta(x'y') + \Delta(\varphi') \equiv \Delta(\varphi') \mod. \wp k.$$

Da $\Phi \cong \Phi'$ ist, folgt hieraus nach Satz 4 und Satz 3 auch $\varphi \cong \varphi'$, also $\langle\bar{\mathfrak{u}}, \bar{\mathfrak{v}}\rangle \cong \langle\bar{\mathfrak{u}}', \bar{\mathfrak{v}}'\rangle$.

b) Wenn $\mathfrak{r}$ vierdimensional und vollregulär ist, so schließt man wie eben, mit $\bar{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}$.

c) Wenn $\mathfrak{r}$ vierdimensional, nicht vollregulär und nicht fremd zu $\mathfrak{R}^*$ ist, so ist

$$\mathfrak{r} = \langle\mathfrak{u}, \mathfrak{v}\rangle + \langle\bar{\mathfrak{u}}\rangle + \langle\mathfrak{w}\rangle$$

mit nicht zu $\mathfrak{R}^*$ gehörigem $\bar{\mathfrak{u}}$ und zu $\mathfrak{R}^*$ gehörigem $\mathfrak{w}$, und man kann $\mathfrak{r}$ in einen fünfdimensionalen Teilraum

$$\bar{\mathfrak{r}} = \langle\mathfrak{u}, \mathfrak{v}\rangle + \langle\bar{\mathfrak{u}}, \bar{\mathfrak{v}}\rangle + \langle\mathfrak{w}\rangle$$

von $\mathfrak{R}$ mit vollregulärem $\langle\bar{\mathfrak{u}}, \bar{\mathfrak{v}}\rangle$ einbetten. Nach dem Zusatz zu Satz 1 hat man dann auch

$$\bar{\mathfrak{r}} = \langle\mathfrak{u}', \mathfrak{v}'\rangle + \langle\bar{\mathfrak{u}}', \bar{\mathfrak{v}}'\rangle + \langle\mathfrak{w}\rangle$$

mit einem weiteren vollregulären Teilraum $\langle\bar{\mathfrak{u}}', \bar{\mathfrak{v}}'\rangle$ (wobei aber nur $\langle\bar{\mathfrak{u}}', \bar{\mathfrak{v}}'\rangle + \langle\mathfrak{w}\rangle$ eindeutig festliegt). Daraus folgt wieder

$$\langle\mathfrak{u}, \mathfrak{v}\rangle^* = \langle\bar{\mathfrak{u}}, \bar{\mathfrak{v}}\rangle + \bar{\mathfrak{r}}^*, \quad \langle\mathfrak{u}', \mathfrak{v}'\rangle^* = \langle\bar{\mathfrak{u}}', \bar{\mathfrak{v}}'\rangle + \bar{\mathfrak{r}}^*,$$

so daß es genügt, $\langle\bar{\mathfrak{u}}, \bar{\mathfrak{v}}\rangle \cong \langle\bar{\mathfrak{u}}', \bar{\mathfrak{v}}'\rangle$ zu beweisen (bei geeigneter Festlegung von $\langle\bar{\mathfrak{u}}', \bar{\mathfrak{v}}'\rangle$). Sei dazu

$$|\bar{\mathfrak{u}}|^2 = \bar{a}, \quad \bar{\mathfrak{u}}\bar{\mathfrak{v}} = \bar{b}, \quad |\bar{\mathfrak{v}}|^2 = \bar{c}, \quad |\mathfrak{w}|^2 = d.$$

Da $\langle\mathfrak{u}', \mathfrak{v}'\rangle$ in $\mathfrak{r} = \langle\mathfrak{u}, \mathfrak{v}\rangle + \langle\bar{\mathfrak{u}}\rangle + \langle\mathfrak{w}\rangle$ enthalten und vollregulär ist, gilt

$$\langle\mathfrak{u}', \mathfrak{v}'\rangle = \langle\mathfrak{u} + \alpha\bar{\mathfrak{u}} + \beta\mathfrak{w}, \ \mathfrak{v} + \gamma\bar{\mathfrak{u}} + \delta\mathfrak{w}\rangle.$$

Weil $\mathfrak{t} = \langle \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle$ vierdimensional ist, ist dabei $\alpha\delta + \beta\gamma \neq 0$. Daher sind α, γ nicht beide Null. Ist etwa $\gamma \neq 0$, so kann man das Basiselement $\bar{\mathfrak{u}}$ durch $\gamma\bar{\mathfrak{u}} + \delta\mathfrak{w}$ ersetzen, oder also $\gamma = 1$, $\delta = 0$ annehmen:

$$\langle \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle = \langle \mathfrak{u} + \alpha\bar{\mathfrak{u}} + \beta\mathfrak{w},\ \mathfrak{v} + \bar{\mathfrak{u}} \rangle.$$

Nach Satz 3 ist dann

$$(\bar{a}\alpha^2 + d\beta^2)\bar{a} \equiv 0 \quad \text{mod. } \wp k,$$

oder also wegen $\bar{a}^2\alpha^2 \equiv \bar{a}\,\bar{\alpha}$ mod. $\wp k$

$$\bar{a}(\alpha + d\beta^2) \equiv 0 \quad \text{mod. } \wp k. \tag{5}$$

Ersichtlich kann nun

$$\bar{\mathfrak{u}}' = \bar{\mathfrak{u}}, \quad \bar{\mathfrak{v}}' = \bar{\mathfrak{v}} + \bar{b}(\mathfrak{u} + \alpha\mathfrak{v} + \beta\mathfrak{w})$$

gewählt werden (wobei das an sich entbehrliche Glied $\beta\mathfrak{w}$ mit Rücksicht auf unseren Zweck hinzugefügt ist). Dann ist

$$|\bar{\mathfrak{u}}'|^2 = \bar{a}, \quad \bar{\mathfrak{u}}'\bar{\mathfrak{v}}' = \bar{b}, \quad |\bar{\mathfrak{v}}'|^2 = \bar{c} + \bar{b}^2(\alpha + d\beta^2).$$

Wegen (5) folgt hieraus $\dfrac{\bar{a}'\bar{c}'}{\bar{b}'^2} \equiv \dfrac{\bar{a}\bar{c}}{\bar{b}^2}$ mod. $\wp k$, und daher nach dem Zusatz 1 zu Satz 3 die Behauptung $\langle \bar{\mathfrak{u}}, \bar{\mathfrak{v}} \rangle \simeq \langle \bar{\mathfrak{u}}', \bar{\mathfrak{v}}' \rangle$.

d) Wenn $\mathfrak{t}$ vierdimensional, nicht vollregulär, aber fremd zu $\mathfrak{R}^*$ ist, so ist wie im Falle d) des vorigen Beweises

$$\mathfrak{t} = \langle \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \rangle + \langle \bar{\mathfrak{u}} \rangle + \langle \bar{\mathfrak{v}} \rangle$$

mit nicht zu $\mathfrak{R}^*$ gehörigen $\bar{\mathfrak{u}}$, $\bar{\mathfrak{v}}$, und man kann $\mathfrak{t}$ in einen vollregulären sechsdimensionalen Teilraum

$$\mathfrak{t} = \langle \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \rangle + \langle \bar{\mathfrak{u}}, \bar{\mathfrak{v}} \rangle + \langle \bar{\bar{\mathfrak{u}}}, \bar{\bar{\mathfrak{v}}} \rangle$$

von $\mathfrak{R}$ einbetten. Nach dem Zusatz zu Satz 1 hat man dann auch

$$\bar{\mathfrak{t}} = \langle \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle + \langle \bar{\mathfrak{u}}', \bar{\mathfrak{v}}' \rangle + \langle \bar{\bar{\mathfrak{u}}}', \bar{\bar{\mathfrak{v}}}' \rangle$$

mit weiteren vollregulären Teilräumen $\langle \bar{\mathfrak{u}}', \bar{\mathfrak{v}}' \rangle$, $\langle \bar{\bar{\mathfrak{u}}}', \bar{\bar{\mathfrak{v}}}' \rangle$ (von denen nur die Summe eindeutig festliegt). Daraus folgt

$$\langle \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \rangle^* = \langle \bar{\mathfrak{u}}, \bar{\mathfrak{v}} \rangle + \langle \bar{\bar{\mathfrak{u}}}, \bar{\bar{\mathfrak{v}}} \rangle + \bar{\mathfrak{t}}^*, \quad \langle \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle^* = \langle \bar{\mathfrak{u}}', \bar{\mathfrak{v}}' \rangle + \langle \bar{\bar{\mathfrak{u}}}', \bar{\bar{\mathfrak{v}}}' \rangle + \bar{\mathfrak{t}}^*,$$

so daß es genügt, $\langle \bar{\mathfrak{u}}, \bar{\mathfrak{v}} \rangle \simeq \langle \bar{\mathfrak{u}}', \bar{\mathfrak{v}}' \rangle$, $\langle \bar{\bar{\mathfrak{u}}}, \bar{\bar{\mathfrak{v}}}, \rangle \simeq \langle \bar{\bar{\mathfrak{u}}}', \bar{\bar{\mathfrak{v}}}' \rangle$ zu beweisen (bei geeigneter Festlegung von $\langle \bar{\mathfrak{u}}', \bar{\mathfrak{v}}' \rangle$, $\langle \bar{\bar{\mathfrak{u}}}', \bar{\bar{\mathfrak{v}}} \rangle$). Sei dazu

$$|\bar{\mathfrak{u}}|^2 = \bar{a}, \quad \bar{\mathfrak{u}}\bar{\mathfrak{v}} = \bar{b}, \quad |\bar{\mathfrak{v}}|^2 = \bar{c}$$

$$|\bar{\bar{\mathfrak{u}}}|^2 = \bar{\bar{a}}, \quad \bar{\bar{\mathfrak{u}}}\bar{\bar{\mathfrak{v}}} = \bar{\bar{b}}, \quad |\bar{\bar{\mathfrak{v}}}|^2 = \bar{\bar{c}}.$$

Wie im vorigen Falle kann man wieder

$$\langle \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle = \langle \mathfrak{u} + \alpha\bar{\mathfrak{u}} + \beta\bar{\bar{\mathfrak{v}}},\ \mathfrak{v} + \bar{\mathfrak{u}} \rangle$$

annehmen, so daß analog zu (5) die Beziehung

$$\bar{a}(\alpha + \bar{\bar{c}}\beta^2) \equiv 0 \quad \text{mod. } \wp k \tag{5'}$$

besteht. Ersichtlich kann nun

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{u}}' &= \bar{\mathfrak{u}}, & \bar{\mathfrak{v}}' &= \bar{\mathfrak{v}} + \bar{b}(\mathfrak{u} + \alpha\mathfrak{v} + \beta\bar{\bar{\mathfrak{v}}}), \\ \bar{\bar{\mathfrak{u}}}' &= \bar{\bar{\mathfrak{u}}} + \bar{\bar{b}}\beta\mathfrak{v}, & \bar{\bar{\mathfrak{v}}}' &= \bar{\bar{\mathfrak{v}}} \end{aligned}$$

gewählt werden. Dann ist

$$|\bar{\mathfrak{u}}'|^2 = \bar{a}, \quad \bar{\mathfrak{u}}'\bar{\mathfrak{v}}' = \bar{b}, \quad |\bar{\mathfrak{v}}'|^2 = \bar{c} + \bar{b}^2(\alpha + \bar{c}\beta^2)$$
$$|\bar{\bar{\mathfrak{u}}}'|^2 = \bar{\bar{a}}, \quad \bar{\bar{\mathfrak{u}}}'\bar{\bar{\mathfrak{v}}}' = \bar{\bar{b}}, \quad |\bar{\bar{\mathfrak{v}}}'|^2 = \bar{\bar{c}}.$$

Wegen (5′) folgen hieraus nach dem Zusatz 1 zu Satz 3 die Behauptungen

$$\langle\bar{\mathfrak{u}}, \bar{\mathfrak{v}}\rangle \simeq \langle\bar{\mathfrak{u}}', \bar{\mathfrak{v}}'\rangle, \quad \langle\bar{\bar{\mathfrak{u}}}, \bar{\bar{\mathfrak{v}}}\rangle \simeq \langle\bar{\bar{\mathfrak{u}}}', \bar{\bar{\mathfrak{v}}}'\rangle.$$

Damit ist Satz 6 bewiesen.

Folgerung. *Ist φ vollregulär und $\varphi + f \simeq \varphi + f'$,* so ist $f \simeq f'$.

Beweis. Durch Transformation von φ auf Quasidiagonalform kommt man auf den Fall zurück, daß φ eine vollreguläre binäre Form ist. Wir bilden die vollreguläre quaternäre Form $\varphi + \varphi$. Sie stellt die Null dar, indem man den Variablen in den beiden Summanden gleiche Werte gibt. Nach Satz 6 ist also

$$\varphi + \varphi \simeq xy + \psi,$$

wobei die binäre Form ψ wieder vollregulär ist. Nun ist

$$\Delta(\varphi + \varphi) \equiv \Delta(\varphi) + \Delta(\varphi) \equiv 0 \mod \wp k$$

und nach Satz 4

$$\Delta(\varphi + \varphi) \equiv \Delta(xy) + \Delta(\psi) \equiv \Delta(\psi) \mod \wp k,$$

also $\Delta(\psi) \equiv 0 \mod \wp k$. Nach dem Zusatz 2 zu Satz 3 folgt daraus $\psi \simeq x'y'$. Wir haben damit die Regel

$$\varphi + \varphi \simeq xy + x'y'. \tag{6}$$

Aus der Voraussetzung $\varphi + f \simeq \varphi + f'$ folgt nun $\varphi + \varphi + f \simeq \varphi + \varphi + f'$, also $xy + x'y' + f \simeq xy + x'y' + f'$. Daraus folgt durch zweimalige Anwendung von Satz 6 die Behauptung $f \simeq f'$.

Durch wiederholte Anwendung von Satz 6 ergibt sich, daß jede quadratische Form F in die Gestalt $\sum_i x_i y_i + f$ transformierbar ist, wo f eine die Null nicht darstellende Form ist. Dabei ist f durch F bis auf äquivalente eindeutig bestimmt. Wir nennen f wie in W. Q. die Grundform von F, und nennen zwei Formen F und F' ähnlich, in Zeichen $F \sim F'$, wenn sie äquivalente Grundformen haben. Diese Beziehung ist reflexiv, symmetrisch und transitiv. Ist $F_1 \sim F_1'$ und $F_2 \sim F_2'$, so ist $F_1 + F_2 \sim F_1' + F_2'$. Ähnliche Formen haben insbesondere äquivalente quasilineare Teile.

Satz 7. *Sind F und F' ähnlich, so sind die quasilinearen Teile von F und F' zur Grundform von $F + F'$ äquivalent, und umgekehrt.*

Beweis. Wir können beim Beweis beider Behauptungen voraussetzen, daß die quasilinearen Teile von F und F' übereinstimmen. Sei

$$F^* = \sum_j d_j z_j^2$$

dieser gemeinsame quasilineare Teil von F und F'. Ist nun $F \sim F'$, so hat man

$$F \sim \varphi + F^*, \quad F' \sim \varphi + F^*$$

mit einer vollregulären Form φ. Nach (6) ist

$$\varphi + \varphi \sim 0.$$

Ferner ist

$$F^* + F^* = \sum_j d_j z_j^2 + \sum_j d_j z_j'^2 = \sum_j d_j (z_j + z_j')^2 \simeq \sum_j d_j \bar{z}_j^2 \simeq F^*$$

(in dem Sinne, daß auf eine reguläre Form reduziert wird). Daraus folgt

$$F + F' \sim (\varphi + \varphi) + (F^* + F^*) \sim F^*.$$

Insbesondere gilt hiernach stets

$$F + F \sim F^*.$$

Ist nun umgekehrt

$$F \sim \varphi + F^*, \quad F' \sim \varphi' + F^*$$

mit vollregulären φ, φ', und ist dabei $F + F' \sim F^*$, so folgt vermöge der Regel

$$F^* + F^* \simeq F^*$$

die Behauptung:

$$F \simeq F + F^* \sim F + (F + F') = (F + F) + F' \sim F^* + F' \simeq F'.$$

Satz 8. *Es sei F^* der quasilineare Teil von F, also*

$$F \simeq f + F^*$$

mit vollregulärem f, und es sei $d \neq 0$ irgendein durch F^* darstellbares Element aus k. Dann ist die Algebra

$$C_0(dF) = C(df) \cdot k(\sqrt{F^*})$$

eine Invariante der Form F.

Ist F eine ternäre nicht quasilineare Form, also

$$F \simeq f + dz^2 = (ax^2 + bxy + cy^2) + dz^2,$$

so bilden dk^2 und $C_0(dF) = C(df)$ ein vollständiges Invariantensystem für die Äquivalenz.

Beweis. Zum Beweis der ersten Behauptung genügt es zu zeigen, daß die Algebra $C(dF)$ nicht von der Wahl des durch F^* darstellbaren Elements $d \neq 0$ abhängt; dann gilt ja dasselbe auch für die Restklassenalgebra $C_0(dF)$ nach ihrem Radikal. Da nun d das Quadrat eines regulären Elements w aus dem Zentrum $C(F^*)$ von $C(F)$ ist, folgt in der Tat $C(dF) \simeq wC(F) = C(F)$.

Zum Beweis der zweiten Behauptung sei u, v das Erzeugendensystem von $C(df)$ mit

$$u^2 = da, \quad uv + vu = db, \quad v^2 = dc.$$

Dann ist

$$dF \simeq df + z^2 = (xu + yv + z)^2.$$

Nun ist das Quadrat des allgemeinen Elements aus $C(df)$:

$$(tuv + xu + yv + z)^2 = dbt(tuv + xu + yv) + (df + z^2 + d^2act^2).$$

Es reduziert sich dann und nur dann auf ein Element aus k, wenn $t = 0$ ist. Daher hat $xu + yv + z$ eine invariante Bedeutung für $C(df)$; es ist das allgemeine Element aus $C(df)$ mit Quadrat in k. Hiernach ist die Form $df + z^2 \simeq dF$ und damit die Form F selbst invariant durch dk^2 und $C(df)$ bestimmt.

Satz 9. *Damit eine ternäre nicht quasilineare Form*

$$F \simeq f + dz^2 = (ax^2 + bxy + cy^2) + dz^2$$

die Null darstellt, ist notwendig und hinreichend, daß die Algebra $C_0(dF) = C(df)$ zerfällt. Damit eine quaternäre nicht quasilineare und nicht vollreguläre Form

$$F \simeq f + dz^2 + d'z'^2 = (ax^2 + bxy + cy^2) + dz^2 + d'z'^2$$

die Null darstellt, ist notwendig und hinreichend, daß die Algebra $C_0(dF) = C(df) \cdot k(\sqrt{dd'})$ zerfällt.

Beweis. Stellt F, also auch dF die Null dar, so gilt nach Satz 6

$$dF \simeq xy + z^2 \quad \text{bzw.} \quad xy + z^2 + dd'z'^2,$$

also

$$C_0(dF) \simeq C(xy) \quad \text{bzw.} \quad C(xy) \cdot k(\sqrt{dd'}).$$

Da $C(xy)$ zerfällt, ergibt sich die behauptete Zerfallsbedingung.

Ist umgekehrt diese Zerfallsbedingung erfüllt, also $C_0(dF)$ isomorph zur zweireihigen vollen Matrixalgebra über k bzw. $k(\sqrt{dd'})$, so gibt es in $C_0(dF)$ ein von Null verschiedenes Element mit dem Quadrat Null. Dieses Element hat nach dem vorigen Beweis die Form

$$xu + yv + z \quad \text{bzw.} \quad (x_1 + x_2\sqrt{dd'})u + (y_1 + y_2\sqrt{dd'})v + (z_1 + z_2\sqrt{dd'}),$$

wobei die Elemente x, y bzw. x_1, x_2, y_1, y_2 aus k nicht sämtlich Null sind. Im ternären Falle hat man dann die Nulldarstellung

$$d(ax^2 + bxy + cy^2) + z^2 = 0$$

durch die Form $df + z^2 \simeq dF$. Im quaternären Falle hat man zunächst

$$d[a(x_1^2 + dd'x_2^2) + b((x_1x_2 + dd'y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{dd'}) + c(y_1^2 + dd'y_2^2)] \\ + z_1^2 + dd'z_2'^2 = 0,$$

Aus Rationalitätsgründen ist dabei $x_1y_2 + x_2y_1 = 0$, so daß man setzen kann:

$$x_1 = \lambda_1 x, \quad x_2 = \lambda_2 x,$$
$$y_1 = \lambda_1 y, \quad y_2 = \lambda_2 y,$$

wobei λ_1, λ_2 und x, y je nicht beide Null sind. Dividiert man dann das zugrundeliegende Element aus $C_0(dF)$ durch $\lambda_1 + \lambda_2\sqrt{dd'}$, so geht es in die Form $xu + yv + z + z'\sqrt{dd'}$ über, und man hat die Nulldarstellung

$$d(ax^2 + bxy + cy^2) + z^2 + dd'z'^2 = 0$$

durch die Form $df + z^2 + dd'z'^2 \simeq dF$.

Satz 10. *Damit eine quaternäre vollreguläre Form F die Null darstellt, ist notwendig und hinreichend, daß die Algebra $C(F)$ im Körper $k(\Delta(F)/\wp)$ zerfällt.*

Beweis. Stellt F die Null dar, so gilt nach Satz 6

$$F = xy + f$$

mit einer vollregulären binären Form f, also

$$C(F) \simeq C(xy)C(f) \sim C(f)$$

und

$$\Delta(F) \equiv \Delta(xy) + \Delta(f) \equiv \Delta(f) \quad \text{mod. } \wp k.$$

Da $C(f)$ in $k(\Delta(f)/\wp)$ zerfällt, ergibt sich die behauptete Zerfallsbedingung.

Sei umgekehrt diese Zerfallsbedingung erfüllt. Wir setzen an:

$$F \simeq f_1 + f_2$$

mit vollregulären binären Formen

$$f_1 = a_1x_1^2 + b_1x_1y_1 + c_1y_1^2 = a_1N\left(x_1 + \frac{b_1}{a_1}y_1\omega_1\right) \quad \text{mit} \quad \omega_1 = \frac{a_1c_1}{b_1^2}/\wp,$$

$$f_2 = a_2x_2^2 + b_2x_2y_2 + c_2y_2^2 = a_2N\left(x_2 + \frac{b_2}{a_2}y_2\omega_2\right) \quad \text{mit} \quad \omega_2 = \frac{a_2c_2}{b_2^2}/\wp.$$

Wir brauchen nur den Fall zu betrachten, daß nicht schon f_1 oder f_2 die Null darstellt. Dann sind $a_1, a_2 \neq 0$, und nach dem Zusatz 2 zu Satz 3 sind

$$K_1 = k(\omega_1) = k(\Delta(f_1)/\wp),$$
$$K_2 = k(\omega_2) = k(\Delta(f_2)/\wp)$$

separable quadratische Körper über k. Sei ferner

$$\omega = \omega_1 + \omega_2,$$

also

$$K = k(\omega) = k(\Delta(F)/\wp).$$

Die vorausgesetzte Zerfallsbedingung besagt, daß die Algebra $C(F) \simeq C(f_1)C(f_2)$ im Körper K zerfällt:

$$C(F)_K \simeq C(f_1)_K \cdot C(f_2)_K \sim 1.$$

Da die normalen einfachen Algebren vom Grade 2 den Exponenten 2 haben, kann dies auch dahin ausgesprochen werden, daß die Algebren $C(f_1)$ und $C(f_2)$ durch Erweiterung auf K isomorph werden:

$$C(f_1)_K \simeq C(f_2)_K.$$

Da für ihre Zerfällungskörper K_1 und K_2 jedenfalls

$$KK_1 = KK_2$$

gilt, drückt sich dies durch eine Relation

$$a_2 = a_1 N(\xi + \eta\omega_1) \quad \text{mit} \quad \xi, \eta \text{ in } K$$

aus. Liegen ξ, η sogar in k — das ist sicher der Fall, wenn $K = k$, also $K_1 = K_2$ ist —, so hat man hiernach die Nulldarstellung

$$x_1 = \xi, \quad y_1 = \frac{a_1}{b_1}\eta, \quad x_2 = 1, \quad y_2 = 0$$

durch $f_1 + f_2 \simeq F$. Liegen ξ, η nicht in k — dann ist K quadratisch über k und $KK_1 = KK_2$ quadratisch über K —, so seien

$$\xi' = \xi + p_1, \quad \eta' = \eta + q_1 \quad \text{mit} \quad p_1, q_1 \text{ in } k$$

die Konjugierten zu ξ, η in K. Da $N\left(\frac{\xi' + \eta'\omega_1}{\xi + \eta\omega_1}\right) = 1$ ist, gibt es bekanntlich ein Element $\mu + \nu\omega_1$ mit μ, ν aus K derart, daß

$$\frac{\xi' + \eta'\omega_1}{\xi + \eta\omega_1} = \frac{\mu + \nu(\omega_1 + 1)}{\mu + \nu\omega_1}$$

also

$$\frac{p_1 + q_1\omega_1}{\xi + \eta\omega_1} = \frac{\nu}{\mu + \nu\omega_1} = \frac{1}{\alpha + \omega_1}$$

ist, wo auch $\alpha = \frac{\mu}{\nu}$ in K liegt. Dies α liegt nicht schon in k, weil ξ, η nicht in k liegen sollten; dagegen liegt $N(\alpha + \omega_1) = \wp\alpha + \wp\omega_1$ in k, weil $N(\xi + \eta\omega_1)$ in k liegt. Daher ist notwendig

$$\alpha = r + \omega, \quad \text{also} \quad \alpha + \omega_1 = r + \omega_2 \quad \text{mit} \quad r \text{ in } k.$$

Zusammengenommen folgt so:

$$\xi + \eta\omega_1 = (p_1 + q_1\omega_1)(r + \omega_2) = \frac{p_1 + q_1\omega_1}{p_2 + q_2\omega_2} \quad \text{mit} \quad p_2, q_2 \text{ in } k,$$

und demgemäß

$$a_2 N(p_2 + q_2\omega_2) = a_1 N(p_1 + q_1\omega_1).$$

Daraus ergibt sich die Nulldarstellung

$$x_1 = p_1, \quad y_1 = \frac{a_1}{b_1} q_1, \quad x_2 = p_2, \quad y_2 = \frac{a_2}{b_2} q_2$$

durch $f_1 + f_2 \simeq F$. Damit ist Satz 10 bewiesen.

Satz 11. *Wird über den Körper k die Voraussetzung gemacht, daß die Ähnlichkeitsklassen der normalen einfachen Algebren vom Grade 2 über k eine Gruppe bilden, so ist die Grundform jeder vollregulären Form höchstens quaternär, und für eine nicht vollreguläre Form ist der vollreguläre Teil der Grundform höchstens binär.*

Mit anderen Worten: Unter der angegebenen Voraussetzung über k stellt jede Form F von einem der beiden Typen

$$F \simeq f_1 + f_2 + f_3, \quad F \simeq f_1 + f_2 + dz^2,$$

wo f_1, f_2, f_3 vollreguläre binäre Formen sind, die Null dar.

Beweis. Indem man in f_3 eine der beiden Variablen gleich Null setzt, wird die Behauptung für den ersten Typus auf die Behauptung für den zweiten Typus zurückgeführt. Durch Division mit d kommt man dann auf den Nachweis zurück, daß jede Form vom Typus

$$(7) \quad F \simeq f_1 + f_2 + z^2 = (a_1x_1^2 + b_1x_1y_1 + c_1y_1^2) + (a_2x_2^2 + b_2x_2y_2 + c_2y_2^2) + z^2$$

die Null darstellt.

Nach der Voraussetzung über k ist $C(f_1 + f_2) = C(f_1)C(f_2)$ ähnlich zu einer normalen einfachen Algebra vom Grade 2. Wir können annehmen, daß $C(f_1)$, $C(f_2)$ und $C(f_1 + f_2)$ nicht zerfallen, weil sonst nach Satz 9 bzw. nach Satz 10 schon $f_1 + z^2$ oder $f_2 + z^2$ oder $f_1 + f_2$ die Null darstellt. Dann sind die minimalen Zerfällungskörper von $C(f_1)$, $C(f_2)$ und $C(f_1 + f_2)$ quadratisch. Sind K_1, K_2 untereinander verschiedene minimale separable Zerfällungskörper von $C(f_1)$, $C(f_2)$, so ist der biquadratische Körper K_1K_2 Zerfällungskörper von $C(f_1 + f_2)$, so daß notwendig einer seiner drei quadratischen Teilkörper K_1, K_2, K Zerfällungskörper von $C(f_1 + f_2)$ ist. Entweder können nun K_1, K_2 so gewählt werden, daß weder $C(f_2)$ von K_1 noch $C(f_1)$ von K_2 zerfällt wird; dann wird $C(f_1 + f_2)$ weder von K_1 noch von K_2, also von K zerfällt. Oder aber es sind die minimalen separablen Zerfällungskörper einer der beiden Algebren $C(f_1)$, $C(f_2)$ — sie sei mit $C(f)$ bezeichnet — sämtlich auch Zerfällungskörper der anderen und daher auch von $C(f_1 + f_2)$. Wir zeigen, daß man in diesem Falle ein Zerfällungskörperpaar K_1, K_2 von $C(f)$ so wählen kann, daß der dritte quadratische Teilkörper K von K_1K_2 wieder Zerfällungskörper von $C(f)$ ist.

Sei dazu u, v mit

$$u^2 = a, \quad uv + vu = b, \quad v^2 = c$$

das Erzeugendensystem von $C(f)$ mit

$$f = (xu + yv)^2.$$

Wie man aus der entsprechenden Formel im Beweis von Satz 8 entnimmt, gilt dann für das allgemeine Element aus $C(f)$ die Formel

$$\wp(tuv + xu + yv + z) = \wp(bt)\frac{uv}{b} + (bt - 1)(xu + yv) + (f + \wp z + act^2).$$

Diese Bildung reduziert sich dann und nur dann auf ein Element aus k, wenn $bt = 1$ ist, und dann gilt

$$\wp\left(\frac{uv}{b} + xu + yv + z\right) = f + \frac{ac}{b^2} + \wp z.$$

Hiernach ist der allgemeine minimale separable Zerfällungskörper von $C(f)$ gegeben durch

$$K = k(\delta/\wp) \quad \text{mit} \quad \delta = (ax^2 + bxy + cy^2) + \frac{ac}{b^2} + \wp z,$$

wo x, y, z beliebige Elemente aus k sind. Für zwei solche Zerfällungskörper

$$K_1 = k(\delta_1/\wp) \quad \text{mit} \quad \delta_1 = (ax_1^2 + bx_1y_1 + cy_1^2) + \frac{ac}{b^2} + \wp z_1,$$

$$K_2 = k(\delta_2/\wp) \quad \text{mit} \quad \delta_2 = (ax_2^2 + bx_2y_2 + cy_2^2) + \frac{ac}{b^2} + \wp z_2$$

ist nun der dritte quadratische Teilkörper von K_1K_2 gegeben durch $K = k((\delta_1 + \delta_2)/\wp)$ mit

$$\delta_1 + \delta_2 = (a(x_1 + x_2)^2 + b(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + c(y_1 + y_2)^2) + b(x_1y_2 + x_2y_1) + \wp(z_1 + z_2).$$

Wählt man also x_1, y_1, x_2, y_2 aus k so, daß

$$b(x_1y_2 + x_2y_1) = \frac{ac}{b^2}$$

wird, so ist auch K Zerfällungskörper von $C(f)$.

Wir können demnach in jedem Falle zwei minimale separable Zerfällungskörper

$$K_1 = k(\delta_1/\wp), \quad K_2 = k(\delta_2/\wp)$$

von $C(f_1)$, $C(f_2)$ so wählen, daß

$$K = k((\delta_1 + \delta_2)/\wp)$$

Zerfällungskörper von $C(f_1 + f_2)$ ist. Seien dann

$$C(f_1) = k(\omega_1, \theta_1) \quad \text{mit} \quad \wp\omega_1 = \delta_1, \quad \theta_1\omega_1\theta_1^{-1} = \omega_1 + 1, \quad \theta_1^2 = \alpha_1,$$

$$C(f_2) = k(\omega_2, \theta_2) \quad \text{mit} \quad \wp\omega_2 = \delta_2, \quad \theta_2\omega_2\theta_2^{-1} = \omega_2 + 1, \quad \theta_2^2 = \alpha_2$$

die zugehörigen verschränkten Produktdarstellungen. Ihnen entsprechen die vollregulären binären Formen

$$\varphi_1 = \alpha_1 N(\xi_1 + \eta_1\omega_1) = \alpha_1\xi_1^2 + \alpha_1\xi_1\eta_1 + \alpha_1\delta_1\eta_1^2,$$

$$\varphi_2 = \alpha_2 N(\xi_2 + \eta_2\omega_2) = \alpha_2\xi_2^2 + \alpha_2\xi_2\eta_2 + \alpha_2\delta_2\eta_2^2.$$

Für diese gilt nach Konstruktion

$$C(\varphi_1) \simeq C(f_1), \qquad C(\varphi_2) \simeq C(f_2),$$

$$\Delta(\varphi_1) \equiv \delta_1, \qquad \Delta(\varphi_2) \equiv \delta_2 \mod. \wp k,$$

und daher

$$C(\varphi_1 + \varphi_2) \simeq C(f_1 + f_2),$$

$$\Delta(\varphi_1 + \varphi_2) \equiv \delta_1 + \delta_2 \mod. \wp k.$$

Hieraus folgt einerseits nach Satz 8

$$\varphi_1 + \zeta_1^2 \simeq f_1 + z_1^2, \quad \varphi_2 + \zeta_2^2 \simeq f_2 + z_2^2$$

und daraus

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \zeta^2 \simeq f_1 + f_2 + z^2,$$

während andrerseits das Zerfallen von $C(f_1 + f_2)$ in $K = k((\delta_1 + \delta_2)/\wp)$ das Zerfalle[n] von $C(\varphi_1 + \varphi_2)$ in $k(\Delta(\varphi_1 + \varphi_2)/\wp)$ bedeutet, so daß $\varphi_1 + \varphi_2$ nach Satz 10 die Nu[ll] darstellt. Zusammengenommen ergibt sich daraus, daß $f_1 + f_2 + z^2$ die Null darstellt, wie behauptet.

Satz 12. *Wird über den Körper k die Voraussetzung gemacht, daß jede Form vo[m] Typus (7) in k die Null darstellt, so bilden die Variablenanzahl $m = 2n$, die Algebra $C(F)$ und die Klasse $\Delta(F)$ ein volles Invariantensystem für die Äquivalenz der vollreguläre[n] quadratischen Formen F.*

Für $n = 1$ ist die Voraussetzung über k entbehrlich.

Beweis. Da unter der über k gemachten Voraussetzung nach dem Beweis von Satz 1[1] jede vollreguläre Form F einer vollregulären quaternären Form ähnlich ist, und da di[e] Ähnlichkeitsklasse von $C(F)$ und die Klasse $\Delta(F)$ Ähnlichkeitsinvarianten von F sind, genügt es zu zeigen, daß zwei vollreguläre quaternäre Formen F_1, F_2 mit

$$C(F_1) \simeq C(F_2),$$
$$\Delta(F_1) \equiv \Delta(F_2) \quad \text{mod. } \wp k$$

äquivalent sind. Sei dazu F eine zu $F_1 + F_2$ ähnliche vollreguläre quaternäre Form

$$F \sim F_1 + F_2.$$

Dann ist

$$C(F) \sim C(F_1) \cdot C(F_2) \sim 1,$$
$$\Delta(F) \equiv \Delta(F_1) + \Delta(F_2) \equiv 0 \quad \text{mod. } \wp k.$$

Wegen der ersten Beziehung stellt F nach Satz 10 die Null dar. Nach Satz 6 ist als[o] $F \sim f$, wo f eine vollreguläre binäre Form ist. Wegen der zweiten Beziehung ist dabe[i] $\Delta(f) \equiv 0$ mod. $\wp k$; nach dem Zusatz 2 zu Satz 3 ist daher

$$F \sim 0.$$

Nach Satz 7 folgt daraus $F_1 \sim F_2$, also $F_1 \simeq F_2$, wie behauptet.

Satz 13. *Für $n = 1$ treten genau diejenigen Zusammenstellungen $C(F)$ und $\Delta(F)$ als Invarianten auf, für die $C(F)$ in $k(\Delta(F)/\wp)$ zerfällt.*

Für $n > 1$ treten — wenn die Ähnlichkeitsklassen der normalen einfachen Algebre[n] vom Grade 2 über k eine Gruppe bilden — alle Zusammenstellungen $C(F)$ und $\Delta(F)$ al[s] Invarianten auf.

Beweis. Die erste Behauptung ergibt sich, indem man zu einer verschränkte[n] Produktdarstellung von $C(F)$ mit dem Zerfällungskörper $k(\Delta(F)/\wp)$ wie im Beweis vo[n] Satz 11 die Normform bildet.

Um die zweite Behauptung zu beweisen, wähle man eine binäre Form f_1 mi[t] $C(f_1) \simeq C(F)$ und eine binäre Form f_2 mit $C(f_2) \sim 1$ und $\Delta(f_1) + \Delta(f_2) \equiv \Delta(F)$ mod. $\wp k$. Dann leistet eine zu $f_1 + f_2$ ähnliche Form von $2n$ Variablen das Verlangte.

Zum Abschluß machen wir noch einige Bemerkungen.

Bemerkung 1. Wenn k vollkommen ist, so zerfallen alle normalen einfache[n] Algebren vom Grade 2 über k, und die quasilinearen Teile reduzieren sich auf 0 oder z^2. Danach folgt aus den Sätzen 9, 10, daß jede quadratische Form entweder zu einer vollregulären binären Form oder zu z^2 ähnlich ist.

Bemerkung 2. Wenn k den Unvollkommenheitsgrad $[k : k^2] = 2$ hat, also z. B. wenn k ein algebraischer Funktionenkörper oder ein Potenzreihenkörper einer Unbestimmten t über einem vollkommenen Konstantenkörper Ω ist, so reduzieren sich die quasilinearen Teile auf einen der vier Typen 0, z^2, tz^2, $z_0^2 + tz_1^2$, wo t ein nicht zu k^2 gehöriges Element aus k ist. Ferner bilden in diesem Falle die Ähnlichkeitsklassen der normalen einfachen Algebren vom Grade 2 über k, wie leicht zu sehen, eine Gruppe. Für $[k : k^2] = 2$ ergibt sich demnach aus den Sätzen 9, 10, 11, 12 folgendes:

Für vollreguläre F bilden $m = 2n$, $C(F)$, $\Delta(F)$ ein vollständiges Invariantensystem.

Für F mit quasilinearem Teil dz^2 ($d = 1$ oder t) ist $F \sim f + dz^2$ mit vollregulärem binärem f, und es bilden $m = 2n + 1$, d und $C_0(dF) \sim C(df)$ ein vollständiges Invariantensystem.

Für F mit quasilinearem Teil $z_0^2 + tz_1^2$ ist $F \sim z_0^2 + tz_1^2$, und es bildet $m = 2n + 2$ ein vollständiges Invariantensystem.

Zu der letzten Aussage beachte man, daß $k(\sqrt{t}) = k^{1/2}$, als der einzige inseparable quadratische Erweiterungskörper von k, jede normale einfache Algebra $C(f)$ vom Grade 2 zerfällt, woraus dann die Behauptung nach dem zweiten Teil von Satz 9 folgt.

Eingegangen 25. Januar 1940.