ANNALS OF MATHEMATICS
Vol. 54, No. 3, November, 1951
Printed in U.S.A.

HOMOLOGIE SINGULIÈRE DES ESPACES FIBRÉS

Applications

PAR JEAN-PIERRE SERRE

Received May 4, 1951

INTRODUCTION

L'objet essentiel de ce mémoire est d'étudier l'espace Ω des lacets sur un espace donné X. L'intérêt de cette étude est double: d'une part, Marston Morse[1] [25] a montré que, si X est un espace de Riemann, les propriétés homologiques de Ω sont étroitement liées aux propriétés des *géodésiques* tracées sur X; et, d'autre part, on peut, avec Hurewicz [18], utiliser Ω pour donner une définition récurrente des *groupes d'homotopie* de X et, par suite, tout renseignement sur les groupes d'homologie de Ω entraînera une meilleure connaissance des groupes d'homotopie de X.

Mais l'étude directe de l'homologie de Ω s'était avérée difficile, et n'avait guère pu être menée à bien que dans le cas où X est une sphère. Nous utilisons ici une méthode indirecte, suggérée par la relation $\pi_i(\Omega) = \pi_{i+1}(X)$, qui consiste à considérer Ω comme la fibre d'un espace fibré E qui est contractile, la base étant l'espace X donné. En appliquant alors à E la théorie homologique des espaces fibrés développée par J. Leray, on obtient des relations étroites liant l'homologie de Ω et celle de X, relations que l'on peut appliquer avec succès aux deux problèmes cités plus haut.

La théorie homologique utilisée ici étant la théorie *singulière* (seule adaptée aux problèmes homotopiques), il nous a fallu montrer que la théorie de Leray était valable dans ce cas, et pour cela, il nous a fallu en refaire complètement la partie topologique. Notre exposé ne nécessite donc pas la lecture préalable des mémoires de Leray sur le sujet.

Le contenu des divers chapitres est le suivant:

Le Chapitre I contient les notions préliminaires indispensables, essentiellement la notion de suite spectrale ([22], [19]) des groupes différentiels filtrés. On y trouvera un exposé "abstrait" de la *transgression* et de la *suspension*; la première notion avait été introduite tout d'abord par Chern, Hirsch et Koszul dans le cas de certains espaces fibrés, la seconde par Eilenberg-MacLane dans le cas des complexes $K(\pi; q)$. On y trouvera également un bref aperçu de la théorie des revêtements due à Cartan-Leray (dans le cas particulier des revêtements universels).

Le Chapitre II établit les propriétés de la suite spectrale d'homologie (singulière) des espaces fibrés. Il faut d'abord choisir une nouvelle définition de l'homologie singulière, qui utilise les cubes à la place des simplexes, ce qui est fait au n°1. Le point essentiel, une fois la filtration définie, consiste à prouver que le

[1] Les crochets renvoient à la Bibliographie, placée à la fin de ce mémoire.

terme E_1 de la suite spectrale est isomorphe au groupe des chaînes de la base à coefficients dans le groupe d'homologie de la fibre. Ceci exige certaines constructions de cubes singuliers, qui sont toujours possibles pourvu que l'espace vérifie le *théorème de relèvement des homotopies pour les polyèdres.* Aussi cette dernière propriété est-elle prise ici comme définition des espaces fibrés.

Le Chapitre III indique les premières applications de ce qui précède à divers cas particuliers. Signalons notamment la Prop. 5 qui est la clé de plusieurs résultats intéressants pour la suite, ainsi que la Prop. 3. Les autres résultats sont dus à J. Leray [24] (dans le cadre de la théorie de Čech).

Le Chapitre IV, consacré aux espaces de lacets, a un double but. D'un côté il donne des résultats généraux, intéressants en eux-mêmes (tel le th. de Hopf, la simplicité en toute dimension, etc) qui sont appliqués au n°7 et au n°8 à des problèmes de géodésiques, et d'autre part, il prépare la voie à l'étude des groupes d'homotopie qui fait l'objet du chapitre suivant. Parmi les résultats du premier type, signalons une démonstration très simple du fait que, sur tout espace de Riemann compact connexe, il existe une infinité de géodésiques joignant deux points distinct donnés (résultat qui n'était guère connu que dans le cas des sphères).

Le Chapitre V indique une méthode permettant, dans une certaine mesure, de calculer les groupes d'homotopie d'un espace dont on connait les groupes d'homologie. On en tire aisément le fait que les groupes d'homotopie ont un nombre fini de générateurs si et seulement s'il en est de même des groupes d'homologie (au moins lorsque l'espace est simplement connexe). Nous attaquons aussi le problème du calcul des groupes d'homotopie des sphères: ici, il est commode de séparer les difficultés en effectuant des calculs à coefficients dans des corps de caractéristiques variées. Le cas de la caractéristique nulle peut être traité complètement, et montre que les $\pi_i(\mathbf{S}_n)$ sont *finis* sauf $\pi_n(\mathbf{S}_n)$ et $\pi_{4n-1}(\mathbf{S}_{2n})$ (n quelconque). En caractéristique p, par contre, nous nous bornons à trouver le premier groupe d'homotopie de $\mathbf{S}_n$ (après le n-ème) dont l'ordre soit divisible par p: c'est $\pi_{n+2p-3}(\mathbf{S}_n)$ (au moins si n est impair).

Le Chapitre VI indique très brièvement comment la méthode précedente, appliquée mais en sens inverse, aux groupes d'Eilenberg-MacLane, permet d'obtenir très rapidement des résultats, dont certains étaient connus mais de démonstration difficile.

Les résultats essentiels de ce mémoire ont été résumés dans trois notes aux Comptes-Rendus [28].

Je ne terminerai pas cette introduction sans exprimer à M. H. Cartan toute la reconnaissance que je lui dois pour l'aide qu'il n'a cessé de m'apporter dans mon travail, tant par l'intermédiaire du Séminaire qu'il dirige depuis trois ans, que par de nombreux et profitables contacts directs. C'est notamment grâce à son aide (et à celle de J-L Koszul qui voudra bien trouver ici mes remerciements) que j'ai pu transposer la théorie de Leray en homologie singulière et asseoir ainsi sur une base solide les calculs purement heuristiques que je faisais jusqu'alors. Outre cette contribution particulièrement importante, je lui dois de nombreuses améliorations dans les résultats, l'exposition, et la rédaction.

Qu'il me soit permis de remercier aussi MM. A. Borel, N. Bourbaki, S. Eilenberg, J. Leray pour l'aide, les encouragements, et les conseils, variés mais également efficaces, qu'ils m'ont prodigués. Ma reconnaissance va également à M. A. Denjoy qui a bien voulu présider le jury auquel j'ai soumis cette thèse.

Table des Matières

CHAPITRE I. LA NOTION DE SUITE SPECTRALE

1. La suite spectrale d'un groupe différentiel à filtration croissante

DÉFINITION. Soit (A, d) un groupe différentiel, c'est à dire un groupe abélien A muni d'un endomorphisme d de carré nul. On dit qu'une famille de sous-groupes (A^p) (p entier positif ou négatif) définit sur A une *filtration croissante* si les conditions suivantes sont remplies:

$$\bigcup_p A^p = A; \qquad A^p \subset A^{p+1}; \qquad d(A^p) \subset A^p.$$

On convient de compléter la définition des A^p en posant $A^{-\infty} = 0$ et $A^{+\infty} = A$.

Soit $x \in A$; appelons $w(x)$ la borne inférieure des entiers p tels que $x \in A^p$. L'application $x \to w(x)$ vérifie évidemment les propriétés suivantes:

$$w(a - b) \leqq \mathrm{Sup}(w(a), w(b)); \qquad w(da) \leqq w(a).$$

Réciproquement, si l'on se donne une fonction $w(x)$ sur A, à valeurs entières ($-\infty$ compris), qui vérifie les deux propriétés précédentes, elle définit une *filtration croissante* sur A.

Notations (r désignera un entier positif):

C_r^p: ensemble des éléments de A^p dont le bord est dans A^{p-r}.
B_r^p: ensemble des éléments de A^p qui sont bords d'éléments de A^{p+r}.

C_∞^p: ensemble des éléments de A^p qui sont des cycles.
B_∞^p: ensemble des éléments de A^p qui sont des bords.

Tous ces ensembles sont des sous-groupes de A^p, vérifiant les relations d'inclusion suivantes:

$$B_0^p \subset B_1^p \subset \cdots \subset B_{r-1}^p \subset B_r^p \subset \cdots \subset B_\infty^p \subset C_\infty^p \subset \cdots \subset C_r^p$$
$$\subset C_{r-1}^p \subset \cdots \subset C_1^p \subset C_0^p = A^p.$$

On notera également que $d(C_r^{p+r}) = B_r^p$.

Définition des E_r^p.

Nous poserons: $E_r^p = C_r^p/(C_{r-1}^{p-1} + B_{r-1}^p)$.

La différentielle d applique C_r^p dans C_r^{p-r} et $(C_{r-1}^{p-1} + B_{r-1}^p)$ dans B_{r-1}^{p-r}. Elle définit donc, par passage au quotient, un homomorphisme:

$$d_r^p\colon E_r^p \to E_r^{p-r}.$$

Le *noyau* de d_r^p est: $(C_{r+1}^p + C_{r-1}^{p-1})/(C_{r-1}^{p-1} + B_{r-1}^p)$.
L'*image* de d_r^{p+r} est: $(C_{r-1}^{p-1} + B_r^p)/(C_{r-1}^{p-1} + B_{r-1}^p)$.

En comparant ces deux résultats, on voit que $d_r^p \circ d_r^{p+r} = 0$; en outre le quotient du noyau de d_r^p par l'image de d_r^{p+r} est:

$$(C_{r+1}^p + C_{r-1}^{p-1})/(B_r^p + C_{r-1}^{p-1}) = C_{r+1}^p/[C_{r+1}^p \cap (C_{r-1}^{p-1} + B_r^p)]$$
$$= C_{r+1}^p/(C_r^{p-1} + B_r^p) = E_{r+1}^p.$$

Interprétation des résultats précédents: la suite spectrale.

Posons $E_r = \sum_p E_r^p$ (dans toute la suite, le signe $\sum$ désignera une somme directe); les E_r^p définissent sur E_r une structure graduée: les éléments de E_r^p sont dits de *degré filtrant* p; les applications d_r^p définissent sur E_r une *différentielle d_r homogène et de degré $-r$ vis à vis du degré filtrant*. La suite des groupes différentiels gradués (E_r) $(r = 0, 1, \cdots)$ est dite *suite spectrale* attachée au groupe différentiel filtré A.

Le groupe d'homologie de E_r pour la différentielle d_r, calculé en E_r^p, est isomorphe à E_{r+1}^p, nous venons de le voir. On a donc:

$$H(E_0) = E_1\,;\, H(E_1) = E_2\,;\, \cdots\,;\, H(E_r) = E_{r+1}\,;\, \cdots \text{ etc.}$$

Le terme E_0.

On a: $E_0^p = A^p/A^{p-1}$. On voit donc que E_0 est la somme directe des quotients successifs A^p/A^{p-1}; on l'appelle *le groupe gradué associé au groupe filtré A*.

La différentielle d_0 applique E_0^p dans lui-même; elle est obtenue par passage au quotient à partir de la différentielle d de A (ce qui est possible, puisque A^p et A^{p-1} sont stables pour d).

Le terme E_1.

D'après ce qui précède, on a: $E_1^p = H(A^p/A^{p-1})$.

La différentielle d_1 applique E_1^p dans E_1^{p-1}; elle coincide avec l'homomorphisme bord

$$\partial : H(A^p/A^{p-1}) \to H(A^{p-1}/A^{p-2})$$

de la suite exacte d'homologie du "triple" (A^p, A^{p-1}, A^{p-2}).

Le terme E_∞.

Par analogie avec la définition des E_r, on définit le terme $E_\infty = \sum_p E_\infty^p$ (groupe *terminal* de la suite spectrale) en posant:

$$E_\infty^p = C_\infty^p/(C_\infty^{p-1} + B_\infty^p).$$

L'intérêt de cette définition est que, d'une part, on peut considérer le terme E_∞ comme une limite des termes E_r (nous préciserons ceci au n° suivant), et que, d'autre part, E_∞ est intimement lié à $H(A)$. Il fournit donc une sorte de transition entre les (E_r) et $H(A)$.

Pour préciser ce dernier point, soit D^p l'image de $H(A^p)$ dans $H(A)$ par l'application identique de A^p dans A. On a donc:

$$D^p = C_\infty^p/B_\infty^p.$$

Il suit de là: $D^p/D^{p-1} = C_\infty^p/(C_\infty^{p-1} + B_\infty^p) = E_\infty^p$.
Autrement dit, si l'on considère $H(A)$ comme *filtré* par les D^p, *le groupe E_∞ n'est autre que le groupe gradué associé au groupe filtré $H(A)$.*

Remarquons toutefois que, même si $\bigcap_p A^p = 0$, on n'a pas nécessairement $\bigcap_p D^p = 0$; au n° suivant, nous donnerons une condition suffisante pour qu'il en soit ainsi.

Note. Les définitions qui précèdent ne sont que les traductions, dans un langage adapté à l'homologie, des notions introduites par J. Leray [23] et J.-L. Koszul [20]. On peut d'ailleurs obtenir les résultats de ce n° à partir de ceux de Leray par un simple changement de notation: il suffit de remplacer p par $-p$.

Cette théorie peut s'étendre en majeure partie aux "théories axiomatiques de l'homologie". *Voir* à ce sujet un exposé de S. Eilenberg ([6], Exp. VIII).

2. Cas d'un groupe gradué

Nous supposerons à partir de maintenant que le groupe A est *gradué*, c'est-à-dire est somme directe de sous-groupes ${}^nA$ (n entier positif ou négatif); on supposera de plus que d est de degré -1 vis a vis de cette graduation (autrement dit, $d({}^nA) \subset {}^{n-1}A$), et que la filtration est compatible avec la graduation, c'est-à-dire que chaque A^p est somme directe de ses intersections avec les ${}^nA$. Nous poserons $A^{p,q} = {}^{p+q}A \cap A^p$, et nous désignerons par $H_n(A)$ le n-ème groupe d'homologie de A.

Graduation des termes de la suite spectrale.

L'existence d'une graduation sur A permet de définir des graduations sur les divers groupes introduits au n° précédent. Nous noterons $C_r^{p,q}$, $B_r^{p,q}$, $C_\infty^{p,q}$, $B_\infty^{p,q}$,

$D^{p,q}$ les sous-groupes de $C_r^p, \cdots, D^p$ formés des éléments homogènes et de degré $p + q$. Chaque $C_r^p, \cdots, D^p$ est somme directe des $C_r^{p,q}, \cdots, D^{p,q}$ pour $-\infty < q < +\infty$.

On pose de même: $E_r^{p,q} = C_r^{p,q}/(C_{r-1}^{p-1,q+1} + B_{r-1}^{p,q})$ $(0 \leqq r \leqq +\infty)$.

Les $E_r^{p,q}$ graduent E_r^p. Le terme E_r de la suite spectrale est donc *bigradué* par les $E_r^{p,q}$; p est dit degré *filtrant*, q degré *complémentaire*. Il y a avantage à introduire aussi le degré $p + q$, ou degré *total* (il correspond au degré de A). Les propriétés de degré des différentielles d_r sont les suivantes:

d_r diminue le degré filtrant de r unités,
d_r diminue le degré total de 1 unité,
d_r augmente le degré complémentaire de $r - 1$ unités.

Une hypothèse supplémentaire.

Nous ferons dans toute la suite l'hypothèse suivante:
(Φ)—Si $x \neq 0$ est un élément homogène de A, $0 \leqq w(x) \leqq \deg. x$. En d'autres termes: *la filtration et le degré sont positifs, et la filtration est inférieure au degré.* Une autre formulation est: $A^{n,0} = {}^nA$ et $A^{p,q} = 0$ si $p < 0$.
Conséquences de l'hypothèse (Φ).

On a tout d'abord $E_0^{p,q} = 0$ si p ou $q < 0$. Il s'ensuit que $E_r^{p,q} = 0$ pour p ou $q < 0$, et r quelconque. Ceci est encore vrai pour E_∞, comme on le voit tout de suite. Puisque $E_\infty^{p,q} = D^{p,q}/D^{p-1,q+1}$ on en conclut que $D^{-1,n+1} = 0$ et $D^{n,0} = H_n(A)$. On a donc la suite de composition de $H(A)$:

$$0 = D^{-1,n+1} \subset D^{0,n} \subset \cdots \subset D^{n-1,1} \subset D^{n,0} = H_n(A).$$

En particulier, on voit que $\bigcap_p D^p = 0$.

PROPOSITION 1. *Si la condition* (Φ) *est remplie, on a:*

$$E_r^{p,q} = E_{r+1}^{p,q} = E_{r+2}^{p,q} = \cdots = E_\infty^{p,q} \qquad \textit{pour} \qquad r > \operatorname{Sup}(p, q + 1).$$

Si $r > p$, les éléments de $E_r^{p,q}$ sont tous des cycles pour d_r, puisque d_r diminue le degré filtrant de r unités et que $E_r^{s,t} = 0$ pour $s < 0$. De même, si $r - 1 > q$, aucun élément $\neq 0$ de $E_r^{p,q}$ n'est un bord pour d_r puisque d_r augmente le degré complémentaire de $r - 1$ unités. Il s'ensuit que $E_r^{p,q} = E_{r+1}^{p,q} = \cdots$
Reste à voir que l'on trouve ainsi le groupe $E_\infty^{p,q}$. Pour cela, il suffit de remarquer que, pour r assez grand, on a:

$$C_r^{p,q} = C_\infty^{p,q}; \qquad B_r^{p,q} = B_\infty^{p,q}.$$

On voit donc en quel sens on peut dire que *le groupe E_∞ est la limite des groupes E_r*: pour un degré total n donné, il existe un r assez grand pour que les groupes formés par les termes de degré total n de E_r et de E_∞ soient isomorphes.

Le groupe différentiel R.

Nous poserons $R = A^0$, $R_q = A^{0,q}$. R est un sous-groupe gradué stable de A. On a $E_1^{0,q} = H_q(R)$. D'autre part, tous les éléments de $E_r^{0,q}(r \geqq 1)$ sont des cycles pour d_r, puisque d_r diminue le degré filtrant et que ces éléments sont de degré filtrant minimum. Il en résulte une suite d'homomorphismes sur:

$$H_q(R) = E_1^{0,q} \to E_2^{0,q} \to \cdots$$

En outre ces homomorphismes deviennent des *isomorphismes sur*, dès que $r > q + 1$, d'après la Prop. 1. On voit donc que $E_\infty^{0,q} = E_{q+2}^{0,q}$ s'identifie à un quotient de $H_q(R)$ (ce que l'on peut voir aussi directement, sur l'expression explicite de ces groupes en fonction des $C_r^{p,q}$ et des $B_r^{p,q}$). Mais d'autre part $E_\infty^{0,q} = D^{0,q} \subset H_q(A)$. On peut donc écrire la suite d'homomorphismes:

$$H_q(R) \to E_\infty^{0,q} \to H_q(A),$$

le premier étant sur, le second biunivoque. Le composé n'est autre que l'homomorphisme de $H_q(R)$ dans $H_q(A)$ induit par l'injection: $R \to A$.

Le groupe différentiel S.

Posons $E_1^{p,0} = S_p$, et $S = \sum_p S_p$. Le groupe S est identique au sous-groupe de E_1 formé des éléments de degré complémentaire 0. Comme d_1 conserve le degré complémentaire, il s'ensuit que S *est stable* pour d_1, et constitue un groupe différentiel gradué.

On a $H_p(S) = E_2^{p,0}$; d'autre part, aucun élément $\neq 0$ de $E_r^{p,0}$ n'est un bord pour d_r ($r \geqq 2$) puisque d_r augmente le degré complémentaire et que ces éléments sont de degré complémentaire minimum. Il en résulte une suite d'homomorphismes biunivoques:

$$\cdots \to E_3^{p,0} \to E_2^{p,0} = H_p(S)$$

En outre, ces homomorphismes sont des *isomorphismes sur* dès que r est assez grand. De façon précise (Prop. 1), on a $E_{p+1}^{p,0} = E_\infty^{p,0}$; mais $E_\infty^{p,0} = D^{p,0}/D^{p-1,1} = H_p(A)/D^{p-1,1}$. On peut donc écrire la suite d'homomorphismes:

$$H_p(A) \to E_\infty^{p,0} \to H_p(S),$$

le premier étant sur, le second biunivoque.

Interprétons le produit de ces deux homomorphismes:

Pour cela, rappelons que $E_1^{p,0} = C_1^{p,0}/(C_0^{p-1,1} + B_0^{p,0})$. Comme $C_1^{p,0} = {}^pA$, on a donc un homomorphisme canonique $\pi: A \to S$, qui commute avec le bord et définit un homomorphisme $\pi_*: H_p(A) \to H_p(S)$. Cet homomorphisme π_* est le composé en question.

Il résulte en particulier de ceci que l'image de π_* est $E_\infty^{p,0}$, et que son noyau est $D^{p-1,1}$.

Note. Dans toutes les applications de la suite spectrale connues jusqu'à présent, le groupe A que l'on filtre est un groupe gradué. Par contre, la condition (Φ) n'est en général remplie que dans les applications touchant de près ou de loin à la théorie des espaces fibrés (par exemple, outre cette dernière qui fait l'objet du chapitre suivant, la théorie des groupes d'opérateurs, ou bien celle des extensions de groupes discrets). Le cas le plus important où elle n'est pas remplie est la théorie de Morse.

Dans le cas d'un espace fibré E de fibre F, base B, le groupe A est le groupe des chaînes de E, le groupe R celui des chaînes de F, le groupe S celui des chaînes de B. En outre, les homomorphismes canoniques $R \to A \to S$ sont ceux induits par les applications continues $F \to E \to B$.

3. La transgression et la suspension

Le groupe A/R.

Considérons à nouveau l'application canonique:

$$\pi : A^{p,0} = C_1^{p,0} \to C_1^{p,0}/(C_0^{p-1,1} + B_0^{p,0}) = S_p .$$

Si $p \geqq 1$, cette application envoie $R_p = A^{0,p}$ dans $C_0^{p-1,1}$ et définit donc, par passage au quotient, un homomorphisme:

$$\pi' : A^{p,0}/A^{0,p} \to S_p ;$$

en outre, si $p \geqq 2$, π' commute avec le bord et définit donc:

$$\pi'_* : H_p(A/R) \to H_p(S).$$

Or $H_p(A/R) = C_p^{p,0}/(C_0^{0,p} + B_1^{p,0})$ et $H_p(B) = C_2^{p,0}/(C_1^{p-1,1} + B_1^{p,0})$. Il suit de là que le noyau de π'_* est égal à l'image de l'application canonique: $C_{p-1}^{p-1,1} \to H_p(A/R)$, et que l'image de π'_* est égale à:

$$C_p^{p,0}/[C_1^{p,0} \cap (C_1^{p-1,1} + B_1^{p,0})] = C_p^{p,0}/(C_{p-1}^{p-1,1} + B_1^{p,0}) = E_p^{p,0}.$$

On peut résumer ceci en disant que la suite:

$$C_{p-1}^{p-1,1} \to H_p(A/R) \to E_p^{p,0} \to 0,$$

est *exacte*, et que le composé: $H_p(A/R) \to E_p^{p,0} \to E_2^{p,0} = H_p(S)$ n'est autre que π'_*.

Un diagramme.

Considérons le diagramme (I) qui suit.

(I)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_\infty^{p-1,1} \arrow[rr] \arrow[d] & & C_{p-1}^{p-1,1} \arrow[r, "d"] \arrow[d] & B_{p-1}^{0,p-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
& H_p(A) \arrow[rr] \arrow[d] & & H_p(A/R) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & H_{p-1}(R) \arrow[r] \arrow[d] & H_{p-1}(A) & \\
0 \arrow[r] & E_\infty^{p,0} \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[dr, "\lambda"'] & & E_p^{p,0} \arrow[r, "d_p"] \arrow[d] \arrow[dl, "\mu"] & E_p^{0,p-1} \arrow[r] \arrow[d] & E_\infty^{0,p-1} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
& 0 & H_p(S) & 0 & 0 & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Les lignes et les colonnes de (I) forment des suites *exactes*; en outre ce diagramme est commutatif car toutes les applications qui y figurent sont définies, soit par une relation d'inclusion dans A, soit par passage au quotient à partir de la différentielle d de A. Enfin les homomorphismes λ et μ qui y figurent sont biunivoques.

La transgression.

Considérons les deux homomorphismes:

$$H_{p-1}(R) \xleftarrow{\partial} H_p(A/R) \xrightarrow{\pi'_*} H_p(S) \qquad (p \geqq 2),$$

et désignons par L le noyau de ∂, par M celui de π'_*, par L' l'image de ∂, par M' l'image de π'_*.

Soit $x \in M'$; choisissons un y tel que $\pi'_*(y) = x$, et considérons $\partial(y)$. C'est un élément de $H_{p-1}(R)$ qui, lorsque y varie, décrit une classe modulo $\partial(M)$. Par passage au quotient, on obtient un homomorphisme canonique, appelé *transgression*:

$$T: M' \to H_{p-1}(R)/\partial(M).$$

Les éléments de M' sont dits *éléments transgressifs* de $H_p(S)$; un cycle de S dont la classe d'homologie est transgressive est appelé *cycle transgressif.*

En traduisant la définition de M' en termes de chaînes, on voit que, pour qu'un cycle $x \in S_p$ soit transgressif, il faut et il suffit qu'il existe un $a \in A$, tel que $\pi(a) = x$ et que $da \in R_{p-1}$.

PROPOSITION 2. *Les groupes M' et $H_{p-1}(R)/\partial(M)$ sont canoniquement isomorphes aux groupes $E_p^{p,0}$ et $E_p^{0,p-1}$. Par ces isomorphismes, la transgression $T: M' \to H_{p-1}(R)/\partial(M)$ est transformée en la différentielle $d_p: E_p^{p,0} \to E_p^{0,p-1}$.*

Cela résulte immédiatement du diagramme (I).

La suspension.

Nous pouvons définir de façon tout analogue à la précédente un homomorphisme de $L' \subset H_{p-1}(R)$ dans $H_p(S)/\pi'_*(L)$. Cet homomorphisme sera appelé *suspension* et noté Σ; on observera qu'il *élève les degrés d'une unité.*

Le cas le plus important pour la suite est celui où $H_p(A) = H_{p-1}(A) = 0$. Dans ce cas, on a $L' = H_{p-1}(R)$, $\pi'_*(L) = 0$, et la suspension est alors *un homomorphisme de $H_{p-1}(R)$ dans $H_p(S)$*, égal à $\pi'_* \circ \partial^{-1}$. On tire alors du diagramme (I) le diagramme commutatif suivant:

(II)
$$\begin{tikzcd} E_p^{p,0} \arrow[r, "d_p"] \arrow[d] & E_p^{0,p-1} \\ H_p(S) & H_{p-1}(R) \arrow[l, "\Sigma"'] \arrow[u] \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, d_p est un isomorphisme sur, $E_p^{p,0} \to H_p(S)$ est *biunivoque* et a même image que Σ, $H_{p-1}(R) \to E_p^{0,p-1}$ est *sur*, et a même noyau que Σ.

Note. Comme il a été dit dans l'introduction, les notions de transgression et de suspension ont été introduites par Chern-Hirsch-Koszul et Eilenberg-Mac-Lane respectivement, dans des problèmes particuliers. La proposition 2 est due à Koszul ([20], deux dernières lignes).

4. Une suite exacte

Hypothèses.

Soient i, j, r trois entiers positifs, avec $i < j$.

Nous supposons que, pour tout n tel que $i \leqq n \leqq j$, on ait $E_r^{p,q} = 0$ pour tout couple (p, q), tel que $p + q = n$, et distinct de deux couples particuliers: (a_n, b_n) et (c_n, d_n). Pour éviter un abus d'indices, nous conviendrons de noter ${}^nE'_s$ (resp. ${}^nE''_s$) le terme $E_s^{p,q}$ correspondant à $p = a_n$, $q = b_n$ (resp. $p = c_n$, $q = d_n$). Ainsi E_r pour le degré total n, ne contient que *deux termes éventuellement non nuls:* ${}^nE'_r$ et ${}^nE''_r$. On supposera que $a_n < c_n$.

Enfin nous ferons les deux hypothèses suivantes:

$$E_r^{p,q} = 0 \quad \text{si} \quad p + q = n - 1, \quad p \leqq a_n - r \quad \text{et} \quad i \leqq n \leqq j;$$

$$E_r^{p,q} = 0 \quad \text{si} \quad p + q = n + 1, \quad p \geqq c_n + r \quad \text{et} \quad i \leqq n \leqq j.$$

PROPOSITION 3. *Dans les hypothèses précédentes, on a une suite exacte:*

$${}^jE'_r \to H_j(A) \to {}^jE''_r \to {}^{j-1}E'_r \to \cdots \to {}^iE'_r \to H_i(A) \to {}^iE''_r .$$

DÉMONSTRATION. Considérons d'abord la suite de composition de $H_n(A)$ formée par les $D^{p,q}(p + q = n)$. On sait que $D^{p,q}/D^{p-1,q+1} = E_\infty^{p,q}$. Supposons alors que $i \leqq n \leqq j$; si $p \neq a_n$ ou c_n, on aura par hypothèse $E_r^{p,q} = 0$, d'où $E_\infty^{p,q} = 0$. On a donc la suite *exacte*:

$$0 \to {}^nE'_\infty \to H_n(A) \to {}^nE''_\infty \to 0 \qquad (i \leqq n \leqq j).$$

Cherchons ${}^nE'_\infty$; pour cela, remarquons que la différentielle d_s est nulle sur ${}^nE'_s$ $(s \geqq r)$ puisqu'elle applique ce groupe dans $E_s^{p,q}$, où $p = a_n - s$, $q = b_n + s - 1$, groupe qui est nul vu les hypothèses faites. Il suit de là que ${}^nE'_\infty$ est le quotient de ${}^nE'_r$ par le sous-groupe formé des éléments qui sont des bords pour les différentielles d_s. De même, aucun élément $\neq 0$ de ${}^nE''_s$ n'est un bord pour $d_s(s \geqq r)$, et on en conclut que ${}^nE''_\infty$ est le sous-groupe de ${}^nE''_r$ formé des éléments qui sont des cycles pour les différentielles d_s. On peut donc écrire la suite *exacte*:

$${}^nE'_r \to H_n(A) \to {}^nE''_r \qquad (i \leqq n \leqq j).$$

Quel est le noyau du premier homomorphisme? Nous avons vu que c'est le sous-groupe des éléments qui sont des bords pour l'une des différentielles $d_s(s \geqq r)$. Supposons que $i \leqq n \leqq j - 1$; il n'y a alors que deux termes de E_s, dont le degré total soit $n + 1$, et qui puissent ne pas être nuls: ${}^{n+1}E'_s$ et ${}^{n+1}E''_s$. En outre, nous avons déjà vu que les éléments du premier groupe sont tous des d_s-cycles. Il en résulte qu'il existe au plus une différentielle d_s non nulle, celle qui applique ${}^{n+1}E''_s$ dans ${}^{n}E'_s$, et qui correspond donc à $s = c_{n+1} - a_n$. On a donc la suite *exacte*:

$$ {}^{n+1}E''_r \to {}^{n}E'_r \to H_n(A) \qquad (i \leqq n \leqq j-1). $$

On établit de même la suite *exacte*:

$$ H_n(A) \to {}^{n}E''_r \to {}^{n-1}E'_r \qquad (i+1 \leqq n \leqq j). $$

En combinant les diverses suites exactes que nous avons obtenues, on trouve le résultat cherché.

COROLLAIRE. *Supposons que, pour tout* $n \geqq 0$, *on ait* $E_r^{p,q} = 0$ *pour* $p + q = n$ *et* $p \neq a_n$. *Supposons en outre que* $a_n < a_{n-1} + r$ *pour tout* $n \geqq 0$. *On a alors* $H_n(A) = E_r^{a_n, b_n}$ *pour tout* $n \geqq 0$.

Il suffit de poser $c_n = a_n + 1$, $d_n = b_n - 1$, $i = 0$, $j = +\infty$, et d'appliquer la proposition.

Note. La proposition 3 est celle que l'on utilise habituellement pour obtenir une suite exacte à partir d'une suite spectrale. On en verra plusieurs exemples au Chapitre III.

5. La suite spectrale—Cas de la cohomologie

C'est le cas classique, pour lequel le lecteur pourra se reporter à [20] ou à [23]. Nous allons en résumer brièvement les points essentiels.

Groupe différentiel gradué à filtration décroissante.

Soit (A^*, d) un groupe gradué muni d'une différentielle d de degré $+1$. On dit que des sous-groupes A^{*p} (p entier positif ou négatif) définissent sur A une filtration décroissante si les conditions suivantes sont remplies:

(1) $\bigcap_p A^{*p} = 0$, $A^{*p} \supset A^{*p+1}$, $d(A^{*p}) \subset A^{*p}$.
(2) Chaque A^{*p} est somme directe de ses composantes homogènes.
(3) Si $x \neq 0$ est homogène, $0 \leqq w(x) \leqq \deg.\, x$.

(On a noté $w(x)$ la borne supérieure des entiers p tels que $x \in A^{*p}$). Il résulte de (3) que $A^{*0} = A$.

La suite spectrale.

On définit comme au n°2 les groupes $A^{*p,q}$, $C_r^{*p,q}$, $C_\infty^{*p,q}$, $B_r^{*p,q}$, $B_\infty^{*p,q}$, $D^{*p,q}$, $E_r^{*p,q}$. Par exemple, $C_r^{*p,q}$ est formé des éléments $x \in A^{*p}$, homogènes et de degré $p+q$, tels que $dx \in A^{*p+r}$. On a:

$$ E_r^{*p,q} = C_r^{*p,q}/(C_{r-1}^{*p+1,q-1} + B_{r-1}^{*p,q}) \quad (r = 0, 1, \cdots, \infty) $$

$$ E_\infty^{*p,q} = D^{*p,q}/D^{*p+1,q-1} $$

$$ 0 = D^{*n+1,-1} \subset D^{*n,0} \subset \cdots \subset D^{*1,n-1} \subset D^{*0,n} = H^n(A^*). $$

La différentielle d_r, obtenue par passage au quotient comme au n°1, applique $E_r^{*p,q}$ dans $E_r^{*p+r,q-r+1}$; ses propriétés de degré sont donc opposées à celles données au n°2. On a encore $H(E_r^*) = E_{r+1}^*$. La suite des (E_r^*) est dite *suite spectrale de cohomologie de* A.

Les groupes différentiels R^* et S^*.

On pose $R^* = A^*/A^{*1}$, $S_p^* = E_1^{*p,0}$, $S^* = \sum_p S_p^*$. Les résultats des n° 2 et 3 se transposent alors sans peine: on a des homomorphismes canoniques permis: $S^* \to A^* \to R^*$, qui donnent lieu aux homomorphismes: $H^p(S^*) \to H^p(A^*) \to H^p(R^*)$; la *transgression* $d_p: E_p^{*0,p-1} \to E_p^{*p,0}$ applique un sous-groupe de $H^{p-1}(R^*)$ dans un quotient de $H^p(S^*)$ pour $p \geqq 2$; elle peut aussi être obtenue par passage au quotient à partir des homomorphismes:

$$H^{p-1}(R^*) \xrightarrow{\delta} H^p(A^{*1}) \longleftarrow H^p(S^*);$$

pour qu'un cocycle x de dimension $p - 1$ de R^* soit transgressif (c'est-à-dire pour que sa classe de cohomologie appartienne à $E_p^{*0,p-1}$), il faut et il suffit qu'il existe $a \in A^*$, se projetant en x par l'homomorphisme $A^* \to R^*$, et tel que $da \in S_p^*$.

Exemple.

Soit A un groupe différentiel gradué à filtration croissante, vérifiant (Φ). Posons ${}^nA^* = \text{Hom}\,({}^nA, G)$, où G est un groupe abélien quelconque. Le groupe $A^* = \sum_n {}^nA^*$ est gradué par les ${}^nA^*$ et peut être muni d'une différentielle d, transposée de celle de A.

Si A^p désigne les sous-groupes définissant la filtration de A, appelons A^{*p} l'annulateur de A^{p-1}. On vérifie aisément les propriétés (1), (2), (3).

Structure multiplicative.

Supposons que A^* soit muni d'une structure d'*anneau* telle que:

(a) Si x et y sont homogènes de degrés p et q, $x \cdot y$ est homogène de degré $p + q$, et l'on a $d(x \cdot y) = dx \cdot y + (-1)^p x \cdot dy$ (on dit alors que d est une antidérivation de A);

(b) $A^{*i} \cdot A^{*j} \subset A^{*i+j}$.

On voit alors tout de suite que l'on peut munir les E_r^* d'une structure d'anneau, avec $E_r^{*p,q} \cdot E_r^{*p',q'} \subset E_r^{*p+p',q+q'}$, et que les différentielles d_r sont des *antidérivations* des E_r^* (pour le degré total).

Si A^* est associatif (resp. possède un élément unité), il en est de même des E_r^*.

Une suite exacte.

Les résultats du n° 4 se laissent également transposer sans aucune difficulté. Les hypothèses à faire sont exactement les mêmes, au remplacement près des $E_r^{p,q}$ par $E_r^{*p,q}$. Nous continuerons à noter ${}^nE_r^{*\prime}$ (resp. ${}^nE_r^{*\prime\prime}$) le terme $E_r^{*p,q}$ correspondant à $p = a_n$, $q = b_n$ (resp. $p = c_n$, $q = d_n$). On a alors:

PROPOSITION 3. *Dans les conditions précédentes, on a une suite exacte:*

$${}^jE_r^{*\prime} \leftarrow H^j(A^*) \leftarrow {}^jE_r^{*\prime\prime} \leftarrow {}^{j-1}E_r^{*\prime} \leftarrow \cdots \leftarrow {}^iE_r^{*\prime} \leftarrow H^i(A) \leftarrow {}^iE_r^{*\prime\prime}.$$

6. La suite spectrale attachée au revêtement universel d'un espace

Soit X un espace connexe par arcs, localement connexe par arcs, et localement simplement connexe; on définit à la façon habituelle (*Voir* par exemple, Pontrjagin, *Topological groups*, n° 46) son *revêtement universel* T. Nous allons rappeler quelques relations, dues à Leray et Cartan ([8], [3], [6]), existant entre l'homologie de X, celle de T, et celle du groupe fondamental Π de X.

Définition du revêtement universel. Rappelons-la brièvement: soit $e \in X$ un point fixé; T est l'ensemble des classes de chemins homotopes issus de e. Soit $q \in T$, et h un chemin de la classe q; soit U un voisinage de l'extrémité b de h, et désignons par V_U l'ensemble des classes de chemins obtenus en composant h avec un chemin issu de b et contenu dans U; par définition, les V_U forment un système fondamental de voisinages de q dans T. On vérifie aisément que T, muni de cette topologie, est connexe par arcs, localement connexe par arcs, localement simplement connexe, et simplement connexe. Si à tout $q \in T$, on fait correspondre l'extrémité commune b des chemins de la classe q, on définit ainsi une application continue $p: T \to X$, *appelée projection de* T *sur* X. Cette projection est un homéomorphisme local, et définit comme on sait un isomorphisme du groupe d'homotopie $\pi_i(T)$ sur le groupe d'homotopie $\pi_i(X)$ $(i = 2, 3, \cdots)$

Les opérateurs définis par Π *sur* T.

Identifions Π au groupe des classes de lacets en e; le groupe Π opère alors canoniquement sur T; tout élément de Π, autre que l'élément neutre, définit un homéomorphisme *sans point fixe* de T sur lui-même. Il en résulte que Π opère dans le complexe singulier de T, donc dans les groupes d'homologie et de cohomologie singulières de T. En outre, tout simplexe singulier de X est image par la projection p d'un simplexe singulier de T, défini à une opération de Π près. Autrement dit (avec les notations de [6]): *Le complexe singulier de* T, $K(T)$, *est* Π-*libre, et le complexe* $K(T)_\Pi$ *est isomorphe à* $K(X)$.
(Rappelons que $K(T)_\Pi$ désigne le quotient de $K(T)$ par la relation d'équivalence qu'y définit Π).

La suite spectrale.

Ce qui précède permet d'appliquer les résultats de [6], Exp. XII. On obtient ainsi:

PROPOSITION 4. *Soient* X *un espace connexe par arcs, localement connexe par arcs et localement simplement connexe,* $\Pi = \pi_1(X)$, T *le revêtement universel de* X, G *un groupe abélien. Il existe une suite spectrale d'homologie* (E_r) *avec* $E_2^{p,q} = H_p(\Pi, H_q(T, G))$ *dont le groupe terminal est isomorphe au groupe gradué associé à* $H(X, G)$ *convenablement filtré.*

Une suite analogue existe en cohomologie.

(Précisons que $H_p(\Pi, H_q(T, G))$ désigne le p-ème groupe d'homologie de Π, au sens de Hopf-Eilenberg-MacLane-Eckmann, à valeurs dans le q-ème groupe d'homologie singulière $H_q(T, G)$, groupe sur lequel Π opère canoniquement, comme on l'a vu).

COROLLAIRE 1. *Si* Π *est le groupe additif* Z *des entiers, et s'il opère trivialement sur* $H_i(T, k)$ *pour tout* i (k désignant un corps), *alors* $H_i(X, k)$ *est isomorphe à la somme directe de* $H_i(T, k)$ *et de* $H_{i-1}(T, k)$.

Si $\Pi = Z$ opère trivialement sur un groupe abélien G, on sait que $H_0(\Pi, G) = H_1(\Pi, G) = G$ et $H_i(\Pi, G) = 0$ pour $i \geqq 2$ (ceci n'est rien d'autre, d'après un théorème de Hurewicz [18], que l'homologie d'un *cercle*). Dans le terme E_2 de la suite spectrale de la Prop. 4 le degré filtrant p ne prend que les valeurs 0 et 1, et il s'ensuit que les différentielles $d_2, d_3, \cdots$ sont nulles puisqu'elles abaissent ce degré de 2, 3, $\cdots$ unités. Le terme E_∞ est donc isomorphe à E_2, et, pour le degré total i ne comporte que deux termes:

$$H_0(\Pi, H_i(T, k)) = H_i(T, k) \quad \text{et} \quad H_1(\Pi, H_{i-1}(T, k)) = H_{i-1}(T, k).$$

Puisque les coefficients forment un corps, $H_i(X, k)$ est isomorphe (non canoniquement) à son groupe gradué associé, d'où le résultat.

COROLLAIRE 2. *Supposons que π soit un groupe d'ordre fini, opérant trivialement sur $H_i(T, k)$ pour tout i* (k étant un corps dont la caractéristique ne divise pas l'ordre de Π). *Alors:*

$$H_i(X, k) = H_i(T, k).$$

On a $H_0(\Pi, H_i(T, k)) = H_i(T, k)$, et $H_j(\Pi, H_i(T, k)) = 0$ si $j > 0$ (c'est une conséquence bien connue du "Japanese homomorphism"). On applique alors le corollaire à la Prop. 3.

Note. Nous n'avons voulu donner que les deux résultats, très élémentaires, dont il sera fait usage dans la suite. Ce sont des cas très particuliers de résultats plus généraux, pour lesquels nous renvoyons le lecteur à [6], Exp. XI, XII, XIII.

CHAPITRE II. HOMOLOGIE ET COHOMOLOGIE SINGULIÈRES DES ESPACES FIBRÉS

1. Homologie singulière cubique

La théorie singulière classique (Eilenberg [10]) utilise des *simplexes*; dans la suite de ce chapitre, nous aurons besoin d'une définition équivalente, mais utilisant les *cubes*; il est en effet évident que ces derniers se prêtent mieux que les simplexes à l'étude des produits directs, et, a fortiori, des espaces fibrés qui en sont la généralisation.

Passons en revue les différentes définitions et notations de la théorie cubique:

Les cubes singuliers.

Soit I le segment (0, 1), X un espace topologique. Un *cube singulier* de X à n dimensions est, par définition, une application continue $u: I^n \to X$, ou, ce qui revient au même, une fonction continue $u(x_1, \cdots, x_n)$ $(0 \leqq x_i \leqq 1)$ à valeurs dans X. En particulier, un cube de dimension 0 est un *point* de X, un cube de dimension 1 est un arc tracé dans X.

Un cube u de dimension n est dit *dégénéré* lorsque sa valeur ne dépend pas de x_n : on a $u(x_1, \cdots, x_n) = u(x_1, \cdots, x_{n-1}, y_n)$ quelles que soient les valeurs prises par $x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n, y_n$. Par exemple, un cube de dimension 0 n'est jamais dégénéré; un cube de dimension 1 est dégénéré si et seulement si il est ponctuel.

On notera $Q_n(X)$ le groupe libre admettant pour base l'ensemble des cubes singuliers de dimension n de X, $D_n(X)$ le sous-groupe de $Q_n(X)$ engendré par les cubes dégénérés, $Q(X)$ (resp. $D(X)$) la somme directe des $Q_n(X)$ (resp. $D_n(X)$).

L'opérateur bord.

Soit u un cube singulier de dimension n; nous allons définir certaines *faces* particulières de u.

Soit H une partie à p éléments de l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$ et soit $q = n - p$; soit K le complémentaire de H, et φ_K l'application strictement croissante de K sur l'ensemble $\{1, \cdots q\}$. Si $\varepsilon = 0$ ou 1, nous définirons un nouveau cube singulier $\lambda_H^\varepsilon u$, de dimension q, en posant:

$$(\lambda_H^\varepsilon u)(x_1, \cdots, x_q) = u(y_1, \cdots, y_n)$$

où les y_i sont donnés par:

$$\begin{aligned} &si\ i \in H, \qquad y_i = \varepsilon \\ &si\ i \in K, \qquad y_i = x_{\varphi_K(i)}. \end{aligned}$$

Si H est réduit à un seul élément i, on écrit $\lambda_i^\varepsilon u$ au lieu de $\lambda_{\{i\}}^\varepsilon u$.
On a donc:

$$(\lambda_i^0 u)(x_1, \cdots, x_{n-1}) = u(x_1, \cdots, x_{i-1}, 0, x_i, \cdots, x_{n-1})$$

$$(\lambda_i^1 u)(x_1, \cdots, x_{n-1}) = u(x_1, \cdots, x_{i-1}, 1, x_i, \cdots, x_{n-1}).$$

Ceci étant, nous appellerons *bord* du cube u de dimension n l'élément de $Q_{n-1}(X)$ défini par:

$$du = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i(\lambda_i^0 u - \lambda_i^1 u).$$

La formule évidente:

$$\lambda_i^\varepsilon \circ \lambda_j^{\varepsilon'} = \lambda_{j-1}^{\varepsilon'} \circ \lambda_i^\varepsilon \qquad (i < j)$$

entraîne que $ddu = 0$. En outre, d applique $D_n(X)$ dans $D_{n-1}(X)$, car si u est un cube dégénéré, $\lambda_i^\varepsilon u$ l'est aussi pour $i \leqq n - 1$, et $\lambda_n^0 u = \lambda_n^1 u$. Il en résulte que $D(X)$ est un *sous-groupe permis* du groupe différentiel $Q(X)$.

Les groupes d'homologie et cohomologie cubiques.

Définition. Le groupe gradué à dérivation $C(X) = Q(X)/D(X)$ est dit groupe des *chaînes cubiques singulières* de l'espace X. Ses groupes d'homologie et de cohomologie à coefficients dans un groupe abélien G sont dits *groupes d'homologie et de cohomologie cubiques de X* à coefficients dans G.

On notera $C_n(X)$ le groupe $Q_n(X)/D_n(X)$; on a donc $C(X) = \sum_n C_n(X)$. Ce groupe admet une *base*, dont les éléments correspondent biunivoquement aux cubes non dégénérés de X de dimension n; c'est donc un groupe libre, ce qui permet de lui appliquer les théorèmes classiques des coefficients universels.

Nous noterons $C_n(X, G)$ le groupe $C_n(X) \otimes G$, groupe des chaînes singulières cubiques de dimension n à coefficients dans G; le groupe d'homologie correspondant sera noté $H_n(X, G)$.

Nous noterons $C^n(X, G)$ le groupe $\mathrm{Hom}(C_n(X), G)$ des cochaines cubiques de dimension n à valeurs dans G. Une telle cochaine peut être identifiée à une *fonction*, définie sur les cubes de dimension n de X, nulle sur les cubes dégénérés, et à valeurs dans G. L'opérateur de *cobord* sera noté d; les groupes de cohomologie, $H^p(X, G)$.

Multiplication des cochaines.

Supposons que G soit un anneau, et soient f, g deux cochaines de X à valeurs dans G, de degrés p et q respectivement. Soit u un cube de dimension $p + q$ de X; on va définir une cochaine de degré $p + q$, que l'on notera $f \cdot g$, en posant:

$$(f \cdot g)(u) = \sum_H \rho_{H,K} f(\lambda_K^0 u) \cdot g(\lambda_H^1 u),$$

où H décrit l'ensemble des parties à p éléments de $\{1, \cdots, p + q\}$, K est le complémentaire de H, et $\rho_{H,K} = (-1)^\nu$ (ν étant le nombre des couples (i, j) tels que $i \in H$, $j \in K$, $j < i$).

On vérifie aisément la règle habituelle de dérivation:

$$d(f \cdot g) = df \cdot g + (-1)^p f \cdot dg.$$

Si f et g sont toutes deux nulles sur les cubes dégénérés, il en est de même de $f \cdot g$. En effet, si u est un cube dégénéré, ou bien $\lambda_K^0 u$ est dégénéré, ou bien $\lambda_H^1 u$.

Si l'anneau G a un élément unité, l'anneau des cochaines a un élément unité (grâce au fait qu'il n'y a pas de cubes dégénérés en dimension 0); si G est associatif, il en est de même de l'anneau des cochaines.

Ceci permet de définir l'*anneau de cohomologie* $H^*(X, G) = \sum_n H^n(X, G)$.

Coefficients locaux.

Soit (G_x) un système local sur X au sens de Steenrod [30]. Rappelons que, si h est un arc dans X d'origine a et d'extrémité b, on associe à h un isomorphisme T_h de G_a sur G_b. En outre, T_h ne dépend que de la classe d'homotopie de h et satisfait à une condition évidente de transitivité. Si X est connexe par arcs, tous les G_x sont isomorphes, et le système local est entièrement déterminé par la donnée de l'un d'eux, G_a, et des automorphismes définis dans G_a par le groupe fondamental de X en a.

Les chaînes cubiques sur X à valeurs dans le système local (G_x) sont les combinaisons linéaires formelles de cubes u de X, le coefficient de u étant pris dans le groupe G_x où x est le "premier sommet" de u, c'est à dire le point $x = u(0, \cdots, 0)$.

Le bord de $g \cdot u$ est donné par la formule:

$$d(g \cdot u) = \sum_{i=1}^n (-1)^i (T_{u,i,0}(g) \cdot \lambda_i^0 u - T_{u,i,1}(g) \cdot \lambda_i^1 u),$$

où $T_{u,i,\epsilon}$ désigne l'isomorphisme attaché au chemin $t \to u(0, \cdots, t\varepsilon, 0, \cdots, 0)$, où $t\varepsilon$ est à la i-ème place. On remarquera que $T_{u,i,0}(g) = g$.

On définit de façon duale les cochaines, et leur cobord. Quant au cup-product, il est donné par la formule:

$$(f \cdot g)(u) = \sum_H \rho_{H,K} f(\lambda_K^0 u) \cdot \tau_{u,H}\, g(\lambda_H^1 u),$$

où $\tau_{u,H}$ représente l'isomorphisme des groupes de coefficients attaché au chemin $\chi_{u,H}$ de X, chemin défini par:

$$\chi_{u,H}(t) = u(x_1, \cdots, x_{p+q}), \qquad \text{avec } x_i = 0 \text{ si } i \in K, \qquad x_i = t \text{ si } i \in H.$$

Comparaison avec la théorie singulière classique.

Soit L_n le simplexe affine type de dimension n, c'est à dire la partie de I^{n+1} formée des systèmes $(y_0, \cdots, y_n)$ avec $0 \leqq y_i \leqq 1$, et $\sum_0^n y_i = 1$. Les formules:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 - x_1 \\ y_1 &= x_1(1 - x_2) \\ &\cdots\cdots \\ y_{n-1} &= x_1 x_2 \cdots x_{n-1}(1 - x_n) \\ y_n &= x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n, \end{aligned}$$

définissent une application θ_n de I^n *sur* L_n.
La famille des applications θ_n permet de définir un homomorphisme θ du groupe des chaînes singulières (au sens usuel) dans le groupe des chaînes singulières cubiques. On vérifie par des calculs faciles que θ commute avec le bord, et que son transposé est multiplicatif vis-à-vis du cup-product. Il définit donc un *homomorphisme* des groupes d'homologie singulière classiques dans les groupes d'homologie cubique, ainsi qu'un homomorphisme *multiplicatif* des groupes de cohomologie cubique dans les groupes de cohomologie singulière classiques. On peut montrer que ces homomorphismes sont, en fait, des *isomorphismes sur*; nous ne le ferons pas ici, renvoyant le lecteur à un article d'Eilenberg-MacLane en préparation.

Il résulte de ceci que l'on peut appliquer à l'homologie cubique tous les résultats connus sur l'homologie singulière. Citons en particulier ceci:

Si G est un anneau commutatif, et si $f \in H^p(X, G)$, $g \in H^q(X, G)$, alors $f \cdot g = (-1)^{pq} g \cdot f$ (*anticommutativité du cup-product*).

Dans la suite de cet article, nous dirons "homologie singulière" et "cohomologie singulière" au lieu de "homologie cubique" et "cohomologie cubique".

2. Espaces fibrés; définition et premières propriétés

Pour établir les propriétés de la suite spectrale d'homologie des espaces fibrés (ce qui est le but de ce chapitre), nous utiliserons exclusivement *le théorème* *de relèvement des homotopies pour les polyèdres.* Aussi le prendrons-nous comme définition:

DÉFINITION. *Nous appellerons espace fibré le triple* (E, p, B), *où* E *et* B *sont des espaces topologiques et* p *une application continue de* E *sur* B *vérifiant la condition:*

(R)—*Quelles que soient les applications continues* $f: P \times I \to B$, $g: P \to E$ (*où* P *désigne un polyèdre fini, et* I *le segment* $[0, 1]$) *vérifiant* $p \circ g(x) = f(x, 0)$ *pour tout* $x \in P$, *il existe une application continue* $h: P \times I \to E$ *telle que* $p \circ h = f$ *et que* $h(x, 0) = g(x)$ *pour tout* $x \in P$.

Exemples.

1. Les espaces fibrés *localement triviaux* (fibre-bundles) jouissent de la propriété (R). *Voir*, par exemple, [5], Exp. VIII.
2. Il en est de même des *fibre-spaces* d'Hurewicz-Steenrod.
3. Les espaces fibrés principaux (au sens de [5], Exp. VII) dont le groupe structural est un *GLG* (au sens de Gleason) jouissent de la propriété (R).[2]
4. On verra au Chapitre IV que les espaces de chemins vérifient la propriété (R) bien qu'iis ne rentrent dans aucune des catégories précédentes.

REMARQUE. B n'étant pas supposé séparé, les ensembles $p^{-1}(b)$, $b \in B$, ne sont pas nécéssairement *fermés.* D'autre part, la topologie de B n'est pas nécessairement identique à la topologie quotient de E par la relation d'équivalence définie par p.

PROPOSITION 1. *Soient* (E, p, B) *un espace fibré,* A *et* K *deux polyèdres finis, contractiles, tels que* $A \subset X$. *On suppose données des applications continues* $f: X \to B$, $g: A \to E$, *telles que* $p \circ g(x) = f(x)$ *pour tout* $x \in A$. *Il existe alors une application continue* $h: X \to E$, *prolongeant* g *et telle que* $p \circ h = f$.

Donnons d'abord deux lemmes, dont le premier est bien connu, et dont le second se démontre aisément par récurrence sur n (le cas $n = 1$ n'étant qu'une reformulation de la propriété (R)):

LEMME 1. *Un polyèdre contractile est un rétracte de tout espace normal qui le contient.*

LEMME 2. *Supposons que* $X = A \times I^n$, A *étant plongé dans* X *par l'application:* $a \to (a, s)$, *ou* s *est un point fixé de* I^n. *La proposition* 1 *est vraie dans ce cas.*

Démontrons maintenant la Prop. 1. Soit Y l'espace X où l'on a identifié l'ensemble A à un seul point y; plongeons Y dans un cube I^n où n est un entier convenable (c'est possible parce que Y est de dimension finie); le point y vient en $s \in I^n$. Nous désignerons par j l'application $X \to Y \subset I^n$, et par r une rétraction de X sur A (qui existe d'après le lemme 1).

L'application $x \to (r(x), j(x))$ plonge X homéomorphiquement dans $A \times I^n$, et, par cette application, le point $a \in A$ vient en (a, s).

---

[2] Cela résulte d'un théorème de A. Borel (C. R. Acad. Sci. Paris, *230*, 1950, p. 1246–1248) et d'un théorème de l'auteur (Ibid., *230*, 1950, p. 916–918).

D'autre part, X est un rétracte de $A \times I^n$ (lemme 1); ceci permet de prolonger $f: X \to B$, en $f': A \times I^n \to B$. On peut alors appliquer le lemme 2, et l'on obtient une application $h': A \times I^n \to E$, prolongeant g et telle que $p \circ h' = f'$. Il n'y a plus alors qu'à prendre pour h la restriction de h' à X.

Remarque. Réciproquement, on montre aisément que la propriété énoncée dans la Prop. 1 entraîne la propriété (R). Nous n'utiliserons pas ce fait dans la suite.

Application. Soit F une *fibre* de E, c'est-à-dire un ensemble de la forme $p^{-1}(b)$, $b \in B$. Un raisonnement bien connu, utilisant la Prop. 1, montre que la projection p définit un isomorphisme de $\pi_i(E \text{ mod. } F)$ sur $\pi_i(B)$ pour tout i. D'où la *suite exacte d'homotopie*:

$$\cdots \to \pi_i(F) \to \pi_i(E) \to \pi_i(B) \to \pi_{i-1}(F) \to \pi_{i-1}(E) \to \cdots$$

3. Le système local formé par l'homologie de la fibre

Soit $x \in E$, et $b = p(x) \in B$; nous désignerons par F la fibre passant par x; autrement dit, $F = p^{-1}(b)$.

A partir de maintenant, et jusqu'à la fin de ce chapitre, nous supposerons que *B et F sont connexes par arcs.* Il en résulte immédiatement que E est connexe par arcs, de même que les autres fibres (utiliser la propriété (R)).

Cette hypothèse permet d'employer uniquement des *cubes singuliers* ayant tous leurs sommets en x (ou b), sans changer l'homologie de F, E, E mod. F, B. Cela résulte, par exemple, de l'isomorphisme entre la théorie cubique et la théorie singulière ordinaire. Ainsi, lorsqu'il sera question dans la suite d'un cube de E (resp. de B), il sera sous-entendu que ses sommets sont tous en x (resp. en b).

Nous allons maintenant montrer comment le groupe $\pi_1(B)$ opère sur les groupes d'homologie de F. Pour cela, introduisons la notion suivante:

Définition. *Soit (E, p, B) un espace fibré, v un lacet sur B dont les extrémités sont confondues au point b. Une application C qui, à tout cube singulier u de dimension n de F, fait correspondre un cube singulier $C(u)$ de dimension $n+1$ de E est dite une* construction subordonnée à v *si les conditions suivantes sont remplies:*

1. $\lambda_1^0 C(u) = u$.
2. $(p \circ C(u))(t, t_1, \cdots, t_n) = v(t)$.
3. $C(\lambda_i^\varepsilon u) = \lambda_{i+1}^\varepsilon C(u)$ $(\varepsilon = 0, 1)$.
4. *Si u est dégénéré, $C(u)$ est dégénéré.*

Soit S_C l'endomorphisme des chaînes cubiques de F défini par: $(S_C u)(t_1, \cdots, t_n) = C(u)(1, t_1, \cdots, t_n)$ (définition qui est licite parce que la condition 4 est remplie).
La condition 3 entraîne que $S_C(\lambda_i^\varepsilon u) = \lambda_i^\varepsilon(S_C u)$, d'où par récurrence sur le

nombre d'éléments de H, $S_C(\lambda_H^\varepsilon u) = \lambda_H^\varepsilon(S_C u)$. En particulier, S_C commute avec le bord: c'est un *endomorphisme permis.*

LEMME 3. *Pour tout lacet v, il existe au moins une construction subordonnée à v. En outre, si v_1 et v_2 sont deux lacets appartenant à la même classe d'homotopie, et si C_1 et C_2 sont deux constructions subordonnées à v_1 et v_2 respectivement, alors S_{C_1} et S_{C_2} sont homotopiquement équivalents.*

(La démonstration sera donnée au n°13)

Soit v un lacet sur B, de classe d'homotopie $\alpha \in \pi_1(B)$, C une construction subordonnée à v, S_C l'endomorphisme permis qu'elle définit. L'endomorphisme S_C définit un endomorphisme des groupes d'homologie de F, endomorphisme qui, d'après le lemme 3, ne dépend que de α. Nous le noterons T_α.

PROPOSITION 2. *L'application $\alpha \to T_\alpha$ est une représentation de $\pi_1(B)$ dans le groupe des automorphismes de $H(F)$.*

(Rappelons que $\pi_1(B)$ est muni d'une loi de groupe, obtenue par passage au quotient à partir de la loi de composition des lacets, que nous noterons $*$, et dont on trouvera la définition au Chap. IV, n°1).

Il nous suffit de montrer que $T_e = 1$, et que $T_\alpha \circ T_\beta = T_{\alpha*\beta}$. Pour voir que $T_e = 1$, considérons la construction:

$$(Cu)(t, t_1, \cdots, t_n) = u(t_1, \cdots, t_n).$$

Il est clair qu'elle est subordonnée au lacet réduit au point b, et que $S_C(u) = u$ pour tout u. D'où $T_e = 1$.

Pour voir que $T_\alpha \circ T_\beta = T_{\alpha*\beta}$, soit $v \in \alpha$, $v' \in \beta$; on a $v * v' \in \alpha*\beta$. Soient C et C' des constructions subordonnées à v et v' respectivement. On définit une construction C'' par la formule:

$$(C''u)(t, t_1, \cdots, t_n) = \begin{cases} (C'u)(2t, t_1, \cdots, t_n) & si\ t \leqq 1/2 \\ (C(S_{C'}u))(2t - 1, t_1, \cdots, t_n) & si\ t \geqq 1/2. \end{cases}$$

La construction C'' est subordonnée au lacet $v'' = v * v'$. En outre:

$$(S_{C''}u)(t_1, \cdots, t_n) = (C(S_{C'}u))(1, t_1, \cdots, t_n) = (S_C \circ S_{C'}u)(t_1, \cdots, t_n).$$

D'où $S_{C''} = S_C \circ S_{C'}$ et $T_\alpha \circ T_\beta = T_{\alpha*\beta}$, cqfd.

Nous avons ainsi montré que $\pi_1(B)$ opérait canoniquement sur $H(F)$; on peut de même le faire opérer sur $H^*(F)$, anneau de cohomologie de F. Ainsi, $H(F)$ et $H^*(F)$ forment des systèmes locaux sur B.

PROPOSITION 3. *Supposons que E soit un espace fibré localement trivial dont le groupe structural G soit connexe par arcs. Alors $\pi_1(B)$ opère trivialement sur $H(F)$ et $H^*(F)$.*

Soit v un lacet sur B; nous allons déterminer une construction C subordonnée à v, et telle que $S_C u = u$ pour tout u. Cela démontrera la proposition.

Soit T l'espace obtenu en identifiant les points 0 et 1 de I; v définit une application $v': T \to B$. Soit E' l'espace fibré image réciproque de E par l'application

v' (*Voir* [5], VII et VIII); E' est un espace fibré de fibre F et de base T, et l'on a le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{h} & E \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & {\scriptstyle p}\downarrow \\ T & \xrightarrow{v'} & B \end{array}.$$

Comme G est *connexe par arcs*, E' est trivial, c'est à dire isomorphe à $T \times F$. Si alors u est un cube de F, on peut définir dans $E' = T \times F$ le cube $I \times u$, produit direct de l'application canonique $I \to T$, et de $u: I^n \to F$. En posant $C(u) = h \circ (I \times u)$, on obtient une construction telle que $S_C u = u$.

Note. Une méthode analogue à celle suivie ci-dessus permet de montrer (sans hypothèses de connexion) que les groupes d'homologie et de cohomologie des fibres d'un espace fibré (E, p, B) forment des systèmes locaux sur B.

4. Filtration du complexe singulier de E

(Rappelons que F et B sont connexes par arcs, et que tout cube singulier sur E ou B est supposé avoir tous ses sommets en x, ou b).

Nous allons filtrer le complexe $A = C(E)$, complexe singulier cubique de E (formé des cubes ayant tous leurs sommets en x, d'après ce qui précède). Nous obtiendrons ainsi une *suite spectrale* (E_r) dont nous calculerons le second terme en fonction de l'homologie de B et de celle de F (*Voir* Th. 2); le terme E_∞ de cette suite sera le groupe gradué associé au groupe filtré $H(E)$.

Définition de la filtration.

Pour filtrer $A = C(E)$, il suffit de filtrer $Q(E)$ par des sous-groupes $\cdots T^p \subset T^{p+1} \subset \cdots$, et de prendre les images A^p de ces sous-groupes dans A.

Définissons $T^{p,q} \subset Q_{p+q}(E)$ de la façon suivante:

$T^{p,q}$ est engendré par les cubes de E, de dimension $p + q$, soient u, tels que le cube $p \circ u$, projection de u sur B par p, ne dépende pas de ses q dernières coordonnées. Un tel cube u est donc caractérisé par le fait que $p(u(t_1, \cdots, t_{p+q}))$ ne dépend pas de $t_{p+1}, \cdots, t_{p+q}$.

On pose:

$$T^p = \sum_q T^{p,q}.$$

La filtration définie par les T^p vérifie visiblement la condition:

$$(\Phi) \qquad 0 \leqq w(x) \leqq \text{deg. } x,$$

lorsque $x \neq 0$ est homogène.

En outre, si $u \in T^p$, $\lambda_i^\varepsilon u \in T^p$ pour i quelconque, et, si $i \leqq p$, on a même $\lambda_i^\varepsilon u \in T^{p-1}$. Il suit de là que les T^p sont *stables* pour l'opérateur bord, et, par conséquent, les A^p vérifient toutes les conditions imposées aux n°1 et 2 du Chap. I à une filtration.

Etude du terme E_0.

Rappelons que $E_0^p = A^p/A^{p-1}$, que $E_0 = \sum_p E_0^p$, et que chaque E_0^p est muni de la différentielle d_0 obtenue par passage au quotient à partir de A^p. Ici, *E_0^p est donc isomorphe au groupe formé des combinaisons linéaires de cubes u, tels que $w(u) \leqq p$, modulo les combinaisons linéaires de cubes dégénérés et de cubes tels que $w(u) \leqq p - 1$.*

Si u est un cube tel que $w(u) \leqq p$, on a:

$$d_0 u = \sum_{i>p} (-1)^i(\lambda_i^0 u - \lambda_i^1 u) \quad dans \quad E_0^p,$$

puisque $\lambda_i^\varepsilon u \in T^{p-1}$ si $i \leqq p$.

Définissons maintenant deux opérations B et F sur les cubes $u \in T^{p,q}$: Bu sera un cube de dimension p de B, Fu un cube de dimension q de F, définis par les formules:

$$Bu(t_1, \cdots, t_p) = p \circ u(t_1, \cdots, t_p, y_1, \cdots, y_q) \qquad (y_i \text{ quelconques})$$

$$Fu(t_1, \cdots, t_q) = u(0, \cdots, 0, t_1, \cdots, t_q).$$

(Pour un cube u donné, il y a autant de cubes Fu, Bu que d'entiers p tels que $w(u) \leqq p \leqq$ deg. u; en toute rigueur, il faudrait donc indexer les opérations B et F avec l'entier p; nous nous en dispenserons tant qu'aucune confusion ne pourra en résulter).

Les propriétés essentielles de Bu et Fu sont les suivantes:

1) Si $w(u) \leqq p - 1$, Bu est dégénéré.
2) Si u est dégénéré et si $q > 0$, Fu est dégénéré; si u est dégénéré et si $q = 0$, Bu est dégénéré.
3) $B\lambda_i^\varepsilon u = Bu$, $F\lambda_i^\varepsilon u = \lambda_{i-p}^\varepsilon Fu$ si $i > p$, $\varepsilon = 0, 1$.

Introduisons maintenant le complexe $J_p = C_p(B) \otimes C(F)$, muni de la différentielle d_F définie par:

$$d_F(b \otimes f) = (-1)^p b \otimes df.$$

Définissons un homomorphisme $\varphi: E_0^p \rightarrow J_p$, en posant:

$$\varphi(u) = Bu \otimes Fu. \tag{1}$$

Cette définition est compatible avec les passages au quotient qui définissent E_0^p grâce aux propriétés 1) et 2) des opérations B et F. En outre, la propriété 3) entraîne que $d_F \circ \varphi = \varphi \circ d_0$, autrement dit que *$\varphi$ est un homomorphisme permis.*

5. Calcul du terme E_1

Il résultera de la proposition suivante:

PROPOSITION 4. *L'homomorphisme permis $\varphi: E_0^p \rightarrow J_p$, défini par la formule* (1), *est une équivalence de chaînes.*

Nous allons construire un homomorphisme $\psi: J_p \rightarrow E_0^p$, permis, tel que

$\varphi \circ \psi = 1$, et que $\psi \circ \varphi = h$ soit un opérateur d'homotopie. La proposition en résultera évidemment.

Construction de ψ.

LEMME 4. *A tout couple de cubes (u, v), le premier de dimension p situé dans B, le second de dimension q situé dans F, on peut associer un cube $w = K(u, v)$ situé dans E, de degré $n = p + q$, de filtration $\leqq p$, et vérifiant les conditions:*

1. *$B \cdot K(u, v) = u$ et $F \cdot K(u, v) = v$.*
2. *Pour tout $i \leqq q$, on a: $K(u, \lambda_i^\varepsilon v) = \lambda_{i+p}^\varepsilon K(u, v)$ $(\varepsilon = 0, 1)$.*
3. *Si v est dégénéré, $K(u, v)$ est dégénéré.*

(La démonstration sera donnée au n°11).

Posons $\psi(u \otimes v) = K(u, v)$, considéré comme élément de E_0^p. Cette définition est compatible avec les passages au quotient définissant J_p, car, si u est dégénéré, $K(u, v)$ est de filtration $\leqq p - 1$ d'après 1., et, si v est dégénéré, $K(u, v)$ l'est aussi d'après 3.

La propriété 2. entraîne que ψ commute avec le bord, et la propriété 1. que $\varphi \circ \psi = 1$; il reste donc simplement à vérifier que: *$h = \psi \circ \varphi$ est un opérateur d'homotopie sur E_0^p.*

LEMME 5. *A tout cube u de E, de filtration $\leqq p$ et de dimension $n = p + q$, on peut faire correspondre un cube Su de E, de filtration $\leqq p$ et de dimension $n + 1$, vérifiant les conditions:*

1. *$B \cdot Su = Bu$*
2. *$Su(0, \cdots, 0, t, x_1, \cdots, x_q) = u(0, \cdots, 0, x_1, \cdots, x_q)$.*
3. *$\lambda_{p+1}^0 Su = u$ et $\lambda_{p+1}^1 Su = K(Bu, Fu)$.*
4. *Pour tout $i > p$, on a: $S\lambda_i^\varepsilon u = \lambda_{i+1}^\varepsilon Su$ $(\varepsilon = 0, 1)$.*
5. *Si $q > 0$, et si u est dégénéré, Su est dégénéré.*

(La démonstration sera donnée au n°12).

Posons, pour $u \in E_0^p$: $k(u) = (-1)^p Su$.
Cette définition est compatible avec les passages au quotient qui définissent E_0^p car:

si $w(u) \leqq p - 1$, $w(Su) \leqq p - 1$ (Propriété 1.)
si u est dégénéré et si $q > 0$, Su est dégénéré (Propriété 5.)
si u est dégénéré et si $q = 0$, $w(Su) \leqq p - 1$ (Propriété 1.).

Calculons alors $d_0 ku + kd_0 u$:

$$d_0\, ku = \sum_{i=p+1}^{n+1} (-1)^{i+p}(\lambda_i^0 Su - \lambda_i^1 Su)$$

$$kd_0\, u = \sum_{i=p+1}^{n+1} (-1)^{i+p}(S\lambda_i^0 u - S\lambda_i^1 u) = \sum_{i=p+2}^{n+1} (-1)^{i+p+1}(\lambda_i^0 Su - \lambda_i^1 Su),$$

d'après la Propriété 4.

On a donc:

$$d_0ku + kd_0u = (-1)^{2p+1}(\lambda^0_{p+1}Su - \lambda^1_{p+1}Su) = K(Bu, Fu) - u = h(u) - u,$$

ce qui montre que h est un opérateur d'homotopie et achève la démonstration de la Proposition 4.

Soit maintenant G un groupe abélien, et filtrons le groupe $A \otimes G$ des chaînes de E à coefficients dans G au moyen des $A^p \otimes G$. Le terme E_0^p de cette nouvelle filtration s'obtient en faisant le produit tensoriel de G et du terme E_0^p associé à la filtration de A (cela tient au fait que les A^p sont *facteurs directs* dans A). La proposition 4 montre que le terme E_0^p ainsi obtenu est homotopiquement équivalent à $C_p(B) \otimes C(F) \otimes G = C_p(B) \otimes C(F, G)$.

Puisque $C_p(B)$ est un groupe *libre*, les groupes d'homologie de $C_p(B) \otimes C(F, G)$ sont canoniquement isomorphes aux groupes $C_p(B) \otimes H_q(F, G)$, et l'on obtient ainsi:

THÉORÈME 1. *L'homomorphisme φ défini par la formule* (1) *induit un isomorphisme du terme $E_1^{p,q}$ de la suite spectrale attachée à la filtration de $C(E, G)$ sur le groupe $C_p(B) \otimes H_q(F, G)$, groupe des chaînes singulières de dimension p de B à coefficients dans le q-ème groupe d'homologie singulière de F à valeurs dans G.*

Plus brièvement, nous écrirons:

$$E_1 = C(B, H(F)). \tag{2}$$

REMARQUE. Le Th. 1 montre la signification des divers degrés dont sont munis les termes de la suite spectrale: le degré filtrant est le degré-base, le degré complémentaire est le degré-fibre, et le degré total correspond au degré dans E.

6. Calcul du terme E_2

Nous venons de voir que E_1 était isomorphe à $C(B) \otimes H(F, G)$; nous allons chercher en quoi se transforme la différentielle d_1 par cet isomorphisme. Cela nous permettra de calculer $E_2 = H(E_1)$.

Soit $x = b \otimes h \in C_p(B) \otimes H_q(F, G)$. Nous pouvons nous borner à examiner le cas où b est un cube de B, de dimension p.

Soit y un élément de $C_p(B) \otimes C_q(F, G)$ qui soit un cycle de la classe d'homologie de x. Pour calculer d_1x, nous procéderons ainsi: nous considérerons $\psi(y) \in E_0^{p,q}$, et nous choisirons un élément $z \in A^p$ qui donne $\psi(y)$ par passage au quotient par A^{p-1}. L'élément dz est alors dans A^{p-1} et c'est un cycle. Nous prendrons son image par l'homomorphisme φ. Nous obtiendrons ainsi un cycle $t \in C_{p-1}(B) \otimes C_q(F, G)$ dont la classe dans $C_{p-1}(B) \otimes H_q(F, G)$ sera égale à d_1x.

(Avant de donner le détail de ce calcul, observons que nous aurons besoin d'utiliser les homomorphismes φ, ψ, B, F, K, pour deux valeurs différentes de p; aussi, pour éviter les confusions, mettrons-nous un indice supérieur p, et écrirons-nous B^pu, $K^p(u, v)$, etc.).

Ecrivons d'abord un cycle m de la classe d'homologie de h sous la forme: $m = \sum_\alpha g_\alpha u_\alpha$, $g_\alpha \in G$, u_α cube de F. On peut donc prendre $y = b \otimes m = \sum_\alpha g_\alpha b \otimes u_\alpha$, d'où:

$$z = \sum_\alpha g_\alpha K^p(b, u_\alpha).$$

On a:

$$dz = \sum_{\alpha, i=1}^{n} (-1)^i g_\alpha [\lambda_i^0 K^p(b, u_\alpha) - \lambda_i^1 K^p(b, u_\alpha)].$$

Nous pouvons décomposer la somme précédente en deux: $\sum_{i \leqq p} + \sum_{i > p}$. Mais, si $i > p$, on a: $\lambda_i^\varepsilon K^p(b, u_\alpha) = K^p(b, \lambda_{i-p}^\varepsilon u_\alpha)$ ($\varepsilon = 0, 1$). Puisque m est un cycle, l'expression $\sum_{\alpha, i=1}^q g_\alpha(-1)^i(\lambda_i^0 u_\alpha - \lambda_i^1 u_\alpha)$ est une combinaison linéaire de cubes dégénérés de F. Il en est donc de même de la somme partielle $\sum_{i > p}$, et cette somme est donc nulle *dans* $C(E)$. On peut alors écrire:

$$dz = \sum_{\alpha, i=1}^{p} (-1)^i g_\alpha [\lambda_i^0 K^p(b, u_\alpha) - \lambda_i^1 K^p(b, u_\alpha)].$$

Il est bien clair que chacun des termes de la somme précédente est de filtration $\leqq p - 1$, ce qui nous permet de calculer $\varphi^{p-1}(dz)$ en appliquant l'opérateur φ^{p-1} à chaque terme de cette somme. Comme $\varphi^{p-1}(u) = B^{p-1}u \otimes F^{p-1}u$ pour tout cube u de filtration $\leqq p - 1$, on doit considérer les cubes suivants:

$$B^{p-1}\lambda_i^\varepsilon K^p(b, u_\alpha) \quad \text{et} \quad F^{p-1}\lambda_i^\varepsilon K^p(b, u_\alpha) \qquad (i \leqq p).$$

Le premier de ces cubes est visiblement égal à $\lambda_i^\varepsilon b$; le second est défini par la formule:

$$(F^{p-1}\lambda_i^\varepsilon K^p(b, u_\alpha))(x_1, \cdots, x_q) = K^p(b, u_\alpha)(0, \cdots, 0, \varepsilon, 0, \cdots, 0, x_1, \cdots, x_q)$$

où ε est à la i-ème place.

Pour interpréter cette formule, introduisons, pour tout b, tout $i \leqq p$, $\varepsilon = 0, 1$, la *construction* $u \to C(u)$ définie par:

$$C(u)(t, x_1, \cdots, x_q) = K^p(b, u)(0, \cdots, 0, t\varepsilon, 0, \cdots, 0, x_1, \cdots, x_q).$$

On vérifie immédiatement que l'on a bien une construction subordonnée au lacet $v(t) = b(0, \cdots, 0, t\varepsilon, 0, \cdots, 0)$ où $t\varepsilon$ est à la i-ème place. Si nous notons $S_{C,b,i,\varepsilon}$ l'endomorphisme de $C(F)$ attaché à cette construction, on a donc;

$$S_{C,b,i,\varepsilon} u_\alpha = F^{p-1}\lambda_i^\varepsilon K^p(b, u_\alpha),$$

ce qui permet d'écrire:

$$t = \sum_{\alpha, i=1}^{p} (-1)^i g_\alpha[(\lambda_i^0 b) \otimes S_{C,b,i,0} u_\alpha - (\lambda_i^1 b) \otimes S_{C,b,i,1} u_\alpha].$$

Notons $T_{b,i,\varepsilon}$ l'automorphisme de $H_q(F, G)$ défini par $S_{C,b,i,\varepsilon}$; d'après le lemme 3, cet automorphisme ne dépend que de la classe d'homotopie du lacet $v(t) = b(0, \cdots, 0, t\varepsilon, 0, \cdots, 0)$. On a donc en définitive:

$$d_1 x = \sum_{i=1}^{p} (-1)^i (\lambda_i^0 b \otimes T_{b,i,0} h - \lambda_i^1 b \otimes T_{b,i,1} h). \tag{3}$$

Si le système local formé par $H_q(F, G)$ sur B est trivial, cette formule se réduit à la suivante:

(3′) $$d_1x = (db) \otimes h.$$

Dans le cas général, elle peut s'interpréter en disant:

PROPOSITION 5. *L'isomorphisme canonique induit par φ du groupe $E_1^{p,q}$ sur le groupe $C_p(B) \otimes H_q(F, G)$ transforme la différentielle d_1 en l'opérateur de bord naturel sur $C_p(B)$, au sens des coefficients locaux que forment les $H_q(F, G)$.*

On tire tout de suite de là la valeur du groupe $E_2^{p,q}$ puisque c'est le groupe d'homologie de E_1 muni de la différentielle d_1, calculé en $E_1^{p,q}$:

THÉORÈME 2. *Soit (E, p, B) un espace fibré de fibre F et de base B connexes par arcs; soient G un groupe abélien, (E_r) la suite spectrale attachée au complexe filtré $C(E, G)$. Le terme $E_2^{p,q}$ de cette suite est canoniquement isomorphe à $H_p(B, H_q(F, G))$,* p-ème *groupe d'homologie singulière de B à valeurs dans le système local formé par $H_q(F, G)$.*

Plus brièvement, nous écrirons:

(4) $$E_2 = H(B, H(F)).$$

Note. Le théorème précédent est le pendant (pour la théorie singulière) du résultat énoncé par Leray dans [24], n°6, b (pour la théorie de Čech à supports compacts). On trouvera un résultat analogue (valable pour toute théorie de l'homologie) dans [6], Exp. IX. Dans les trois cas, les hypothèses à faire sur les espaces fibrés considérés ne sont naturellement pas exactement les mêmes.

Signalons d'autre part que l'on peut établir le Th. 2 sans supposer B, ni F, connexes. Nous ne l'avons pas fait ici, parce qu'il nous est plus commode de ne considérer que des cubes dont tous les sommets sont en un seul point: cela permet, comme on va le voir, de faire intervenir commodément l'homologie de F, de E mod. F, ainsi que les groupes d'homotopie de E, F, B.

7. Propriétés de la suite spectrale d'homologie

Commençons par déterminer les groupes différentiels R et S, définis dans le cas général au Chap. I, n°2: *Le groupe différentiel R* est formé, par définition, des éléments de filtration nulle. Or, pour qu'un cube u soit tel que $w(u) = 0$, il faut et il suffit que sa projection soit réduite à un point. Comme tous ses sommets sont en x, c'est donc qu'il est contenu dans la fibre F passant par x. Ainsi, *le groupe R_q est isomorphe à $C_q(F, G)$.*

Le groupe différentiel $S = \sum S_p$ est la somme directe des $E_1^{p,0}$. Or, d'après le Th.1, $E_1^{p,0}$ est isomorphe à $C_p(B) \otimes H_0(F, G) = C_p(B, G)$. Le groupe S est donc isomorphe au *groupe des chaînes de la base.* En outre, d'après la Prop. 5, la différentielle d_1 de S correspond à la différentielle naturelle de $C(B, G)$. Enfin, l'opérateur $\pi : A \to S$ n'est autre que l'homomorphisme induit par la projection $p : E \to B$.

On peut alors appliquer les résultats des n°2 et 3 du Chap. I. On trouve ainsi les homomorphismes:

$$H_i(F, G) \to E_\infty^{0,i} \to H_i(E, G)$$
$$H_i(E, G) \to E_\infty^{i,0} \to H_i(B, G),$$

les premiers étant *sur*, les seconds *biunivoques*. Quant aux composés, ils sont définis par les applications continues: $F \to E \to B$.

Le groupe $E_\infty^{0,i} = E_{i+2}^{0,i}$ est le quotient de $H_i(F, G)$ par les éléments qui sont des bords pour les différentielles d_r successives ($r \geqq 1$).

Le groupe $E_\infty^{i,0} = E_{i+1}^{i,0}$ est le sous-groupe de $H_i(B, G)$ formé des éléments qui sont des cycles pour les d_r ($r \geqq 2$).

La transgression.

D'après la Prop. 2 du Chap. I, elle a deux définitions équivalentes:

(a) c'est la différentielle $d_n : E_n^{n,0} \to E_n^{0,n-1}$. Si $n \geqq 2$, cette différentielle applique un certain sous-groupe de $H_n(B, G)$ dans un certain quotient de $H_{n-1}(F, G)$.

(b) On considère les homomorphismes:

$$H_{n-1}(F, G) \xleftarrow{\partial} H_n(E \text{ mod. } F, G) \xrightarrow{p_*} H_n(B,G),$$

et l'on définit la transgression par passage au quotient, comme il a été expliqué au Chap. I, n°3.

La deuxième définition montre en particulier que $E_n^{n,0}$ est l'image de $H_n(E$ mod. $F, G)$ dans $H_n(B, G)$ par la projection. Ceci peut se traduire en disant qu'un cycle x de B est transgressif (c'est-à-dire appartient au domaine de définition de la transgression) si et seulement s'il existe une chaîne y sur E, se projetant sur x par $E \to B$, et telle que dy soit une chaîne de F.

On peut également recopier le diagramme (I) du Chap. I, en y remplaçant A par E, R par F, S par B. Nous nous bornerons à écrire le diagramme suivant:

(I)
$$\begin{tikzcd}
 & E_n^{n,0} \arrow[r, "d_n"] \arrow[dl] & E_n^{0,n-1} \\
H_n(B, G) & H_n(E \text{ mod. } F, G) \arrow[l, "p_*"'] \arrow[u] \arrow[r, "\partial"] & H_{n-1}(F, G) \arrow[u] \\
\pi_n(B) \otimes G \arrow[u] & \pi_n(E \text{ mod. } F) \otimes G \arrow[l] \arrow[u] \arrow[r] & \pi_{n-1}(F) \otimes G \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

(On notera que $H_{n-1}(F, G) \to E_n^{0,n-1}$ est *sur*, et que $E^{n,0} \to H_n(B, G)$ est *biunivoque*.)

Ce diagramme est *commutatif* parce que, d'une part, le sous-diagramme formé des deux lignes supérieures est extrait du diagramme (I) du Chap. I, donc est commutatif, et, d'autre part, le sous-diagramme formé des deux lignes inférieures est connu pour être commutatif.

Comme l'homomorphisme: $\pi_n(E$ mod. $F) \to \pi_n(B)$ est un isomorphisme sur, on voit que l'image de $\pi_n(B) \otimes G$ dans $H_n(B, G)$ est contenue dans $E_n^{n,0}$. Autrement dit:

Toute classe d'homologie sphérique de B est transgressive.

Un cas particulièrement simple est celui où $E_n^{n,0} \to H_n(B, G)$ et $E_n^{0,n-1} \leftarrow H_{n-1}(F, G)$ sont des isomorphismes sur. On peut alors écrire simplement:

$$(\mathrm{I}') \qquad \begin{array}{ccc} H_n(B, G) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(F, G) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \pi_n(B) \otimes G & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(F) \otimes G \end{array}$$

La suspension.

Dans le cas général, sa définition est analogue à celle donnée plus haut de la transgression (Voir Chap. I, n°3). Dans le cas particulier où $H_{n-1}(E, G) = H_n(E, G) = 0$, l'homomorphisme $\partial : H_n(E \text{ mod. } F, G) \to H_{n-1}(F, G)$ est un isomorphisme sur, et la suspension Σ est définie par:

$$\Sigma = p_* \circ \partial^{-1}$$

Le diagramme (I) se transforme alors en le diagramme:

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{tikzcd} & E_n^{n,0} \arrow[r, "d_n"] \arrow[dl] & E_n^{0,n-1} \\ H_n(B, G) & & H_{n-1}(F, G) \arrow[ll, "\Sigma"'] \arrow[ul] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, d_n est un isomorphisme sur, l'application: $E_n^{n,0} \to H_n(B, G)$ est *biunivoque* et a même image que Σ, et l'application: $H_{n-1}(F, G) \to E_n^{0,n-1}$ est *sur*, et a même noyau que Σ.

8. La suite spectrale de cohomologie

Soit A^* le groupe des cochaines cubiques sur E à valeurs dans le groupe abélien G. On définit sur A^* une filtration décroissante par le procédé indiqué au Chap. I, n°5, Exemple: on appelle A^{*p} le sous-groupe de A formé des cochaines nulles sur les cubes de filtration $\leqq p - 1$.

Les A^p etant facteurs directs dans A comme on l'a déjà remarqué, il s'ensuit que le terme $E_0^{*p,q}$ attaché à la filtration de A^* est isomorphe à $\mathrm{Hom}(E_0^{p,q}, G)$ où $E_0^{p,q}$ désigne le terme correspondant de la suite spectrale d'homologie. On peut donc identifier les éléments de $E_0^{*p,q}$ avec *les fonctions, définies sur les cubes de E dont la dimension est $p + q$ et la filtration $\leqq p$, à valeurs dans G, et nulles sur les cubes dégénérés et les cubes de filtration $\leqq p - 1$.*

Introduisons le groupe $J_p^* = C^p(B, C^*(F, G)) = \mathrm{Hom}(J_p, G)$; posons $J^* = \sum_p J_p^*$, les homomorphismes φ et ψ introduits aux n°4 et 5 définissent des homomorphismes *transposés* $\varphi^* : J^* \to E_0^*$, $\psi^* : E_0^* \to J^*$. Puisque $\varphi \circ \psi = 1$, et que $\psi \circ \varphi = h$ est un opérateur d'homotopie, on a $\psi^* \circ \varphi^* = 1$, et $\varphi^* \circ \psi^* = h^*$ est un opérateur d'homotopie. Il suit de là que E_0^* et J^* sont homotopiquement équivalents. En particulier, φ^* et ψ^* définissent par passage au quotient des isomorphismes réciproques de leurs groupes de cohomologie, ce qui montre que $E_1^{*p,q}$ est canoniquement isomorphe à $C^p(B, H^q(F, G))$.

On montre par un raisonnement calqué sur celui du n°6 que l'isomorphisme

ψ^* transforme la différentielle d_1 en l'opérateur de cobord des cochaines de B à valeurs dans le système local formé par $H^q(F, G)$. Par suite:

PROPOSITION 6. *Le terme $E_2^{*p,q}$ de la suite spectrale de cohomologie de l'espace fibré (E, p, B) est canoniquement isomorphe à $H^p(B, H^q(F, G))$, p-éme groupe de cohomologie de B à valeurs dans le système local défini sur B par $H^q(F, G)$.*

Le résultat précédent ne présente pas un bien grand intérêt par lui-même, étant simplement le "dual" du résultat déjà obtenu pour l'homologie. Il est plus intéressant de connaître les propriétés *multiplicatives* des (E_r^*), et c'est ce que nous allons étudier maintenant.

Nous supposerons pour cela que G est un anneau commutatif, associatif, à élément unité (le cas de deux systèmes de coefficients accouplés sur un troisième se traiterait de façon analogue). On peut alors munir le groupe A^* des cochaines de E d'une structure d'anneau associatif à élément unité (celle qui est définie au n°1). Il est clair que la condition $A^{*p} \cdot A^{*q} \subset A^{*p+q}$ est vérifiée, ce qui permet d'appliquer les résultats du Chap. I, n°5 et de munir les divers termes (E_r^*) $(r = 0, 1, \cdots, \infty)$ d'une structure d'anneau par rapport à laquelle les d_r soient des antidérivations.

Puisque $H^*(F, G)$ définit un système local d'anneaux sur B, on peut munir le groupe $H(J^*) = C^*(B, H^*(F, G))$ d'un produit, que nous noterons $\vee$, qui est le cup-product sur B à valeurs dans le système local $H^*(F, G)$. A partir de ce produit, on peut en définir un autre, noté ., par la formule:

$$(5) \quad \bar{f} \cdot \bar{g} = (-1)^{p'q} \bar{f} \vee \bar{g} \quad \text{si} \quad \bar{f} \in C^p(B, H^q(F, G)), \qquad \bar{g} \in C^{p'}(B, H^{q'}(F, G)).$$

Pour expliciter davantage cette définition, il est commode de choisir des cocycles $f, g \in J^*$, appartenant aux classes $\bar{f}$ et $\bar{g}$. Comme tout élément de J^*, f peut être identifié à une fonction $f(v, w)$ de deux cubes, $v \in C_p(B)$, $w \in C_q(F)$, nulle si l'un d'eux est dégénéré; de même pour g.

Au moyen de f et g, définissons un élément $k \in J^*$ par la formule suivante:

$$(6) \qquad k(v, w) = (-1)^{p'q} \sum_{L,N} \rho_{L,M} \, \rho_{N,P} f(\lambda_M^0 v, \lambda_P^0 w) \cdot g(\lambda_L^1 v, \mu_{v,L} \lambda_N^1 w),$$

où L décrit l'ensemble des parties à p éléments de $\{1, \cdots, p + p'\}$, N l'ensemble des parties à q éléments de $\{1, \cdots, q + q'\}$, $P = \complement N$, $M = \complement L$, où les symboles $\rho_{L,M}$, λ_M^0, etc, sont ceux définis au n° 1, et où $\mu_{v,L}$ désigne un endomorphisme permis des chaines de F qui, par passage à la cohomologie, définisse l'automorphisme de $H^*(F)$ correspondant au lacet $\chi_{v,L}$ de B (avec les notations du n° 1).

Il résulte immédiatement de la définition du cup-product sur F et sur B, que k est un cocycle de J^* dont la classe de cohomologie est

$$\bar{f} \cdot \bar{g} \in C^{p+p'}(B, H^{q+q'}(F, G)).$$

Ceci posé, nous allons prouver le lemme suivant:

LEMME 6. *Les homomorphismes φ^* et ψ^* définissent des isomorphismes multiplicatifs des anneaux E_1^* et $C^*(B, H^*(F, G))$ (ce dernier étant muni du produit qui vient d'être défini).*

Comme nous savons déjà que φ^* et ψ^* définissent, par passage à la cohomologie, des isomorphismes (additifs) réciproques, il suffira de vérifier que, si f et g sont des éléments de J^*, alors l'élément $k = \psi^*(\varphi^*(f)\cdot\varphi^*(g))$ est de la forme (6).

Faisons cette vérification. On a:

$$\begin{aligned} k(v, w) &= (\varphi^*(f)\cdot\varphi^*(g))(K(v, w)) \\ &= \textstyle\sum_H \rho_{H,K}\, \varphi^*(f)(\lambda_K^0 K(v, w))\cdot\varphi^*(g)(\lambda_H^1 K(v, w)), \end{aligned}$$

où H parcourt l'ensemble des parties à $p + q$ éléments de $\{1, \cdots, p + p' + q + q'\}$, et $K = \complement H$. Mais, si $H \cap \{1, \cdots, p + p'\}$ a plus de p éléments, $\lambda_H^1 K(v, w)$ est de filtration $< p'$ et $\varphi^*(g)(\lambda_H^1 K(v, w)) = 0$; de même, si $H \cap \{1, \cdots, p + p'\}$ a moins de p éléments, $\lambda_K^0 K(v, w)$ est de filtration $< p$, et $\varphi^*(f)(\lambda_K^0 K(v, w)) = 0$. On peut donc se borner à considérer les parties H dont l'intersection avec l'ensemble $\{1, \cdots, p + p'\}$ a exactement p éléments. Une telle partie H correspond biunivoquement à un couple (L, N), où L est une partie à p éléments de $\{1, \cdots, p + p'\}$, et N une partie à q éléments de $\{1, \cdots, q + q'\}$. On désignera par M et P les complémentaires de L et N respectivement. Si u est un cube de E, de dimension $p + p' + q + q'$ et de filtration $\leqq p + p'$, on a les identités suivantes:

$$B\lambda_K^0 u = \lambda_M^0 Bu, \quad B\lambda_H^1 u = \lambda_L^1 Bu, \quad F\lambda_K^0 u = \lambda_P^0 Fu, \quad F\lambda_H^1 u = \lambda_{M,L}^{0,1}\lambda_N^1 u,$$

où $\lambda_{M,L}^{0,1}$ désigne l'opération consistant à remplacer les variables d'indices $\epsilon\, M$ par 0, et celles d'indices $\epsilon\, L$ par 1.

Utilisant ces formules, on voit que:

$$\begin{aligned} k(v, w) &= \textstyle\sum_H \rho_{H,K} f(B\lambda_K^0 K(v, w), F\lambda_K^0 K(v, w))\cdot g(B\lambda_H^1 K(v, w), F\lambda_H^1 K(v, w)) \\ &= \textstyle\sum_{L,N} \rho_{H,K} f(\lambda_M^0 v, \lambda_P^0 w)\cdot g(\lambda_L^1 v, \lambda_{M,L}^{0,1} K(v, \lambda_N^1 w)). \end{aligned}$$

Si l'on compare cette formule à (6), on voit qu'il ne reste plus que deux points à établir:

(a) que $\rho_{H,K} = (-1)^{p'q}\rho_{L,M}\rho_{N,P}$, ce qui est immédiat en remontant à la définition de ρ à partir du nombre d'inversions.

(b) que l'endomorphisme des chaines de F, défini par $s \to \lambda_{M,L}^{0,1} K(v, s)$, est l'endomorphisme S_C associé à une construction C subordonnée au lacet $\chi_{v,L}$ de B. Ceci se voit, comme au n° 6, en définissant la construction C par la formule:

$$C(s)(t, x_1, \cdots, x_{q'}) = K(v, s)(y_1, \cdots, y_{p+p'}, x_1, \cdots, x_{q'}),$$

où $y_i = 0$ si $i \,\epsilon\, M$, et $y_i = t$ si $i \,\epsilon\, L$.

La démonstration du lemme 6 est donc achevée.

Théorème 3. *Soit (E, p, B) un espace fibré de fibre F et de base B connexes par arcs. Soit G un anneau commutatif, associatif, à élément unité, et soit (E_r^*) la suite spectrale attachée à la filtration de $C^*(E, G)$. Les termes $E_r^*(r \geqq 2)$ sont des anneaux associatifs, à élément unité, vérifiant la loi d'anticommutation par rapport au degré total, et les différentielles d_r en sont des antidérivations.*

En outre, le produit de deux éléments $f \in E_2^{*p,q}$, $g \in E_2^{*p',q'}$ est égal au produit par $(-1)^{p'q}$ de leur produit en tant que classes de cohomologie sur B, à valeurs dans le système local défini par l'anneau $H^*(F, G)$ (produit $\vee$).

Vu le lemme 6, il ne nous reste à démontrer que l'anticommutativité (il suffit d'ailleurs de le faire pour E_2^*): Puisque $H^*(F, G)$ est un anneau anticommutatif, l'anneau E_2^*, muni du produit $\vee$, vérifie la loi:

$$f \vee g = (-1)^{pp'+qq'}(g \vee f), \quad \text{si} \quad f \in E_2^{*p,q}, \quad g \in E_2^{*p',q'}$$

Comme $f \cdot g = (-1)^{p'q}(f \vee g)$ et $g \cdot f = (-1)^{pq'}(g \vee f)$, on a:

$$f \cdot g = (-1)^{pp'+qq'+pq'+qp'}(g \cdot f) = (-1)^{nn'}g \cdot f$$

$$(n = p + q,\ n' = p' + q'), \text{ cqfd.}$$

Note. Ce théorème est le pendant, pour la théorie singulière, du résultat énoncé par Leray dans [24], n° 6, *i*.

9. Propriétés de la suite spectrale de cohomologie

Ces propriétés étant duales de celles de l'homologie, nous nous bornerons à les énoncer rapidement.

a. *Cohomologie de la fibre.*

On a: $E_1^{*0,q} = C^0(B, H^q(F, G)) = H^q(F, G)$.

Comme les éléments de $E_r^{*0,q} (r \geqq 1)$ sont de degré-base minimum, aucun d'eux, à part 0, n'est un cobord pour d_r. On a donc une suite d'homomorphismes biunivoques:

$$H^q(F, G) = E_1^{*0,q} \leftarrow E_2^{*0,q} \leftarrow \cdots \leftarrow E_{q+2}^{*0,q} = E_{q+3}^{*0,q} = \cdots = E_\infty^{*0,q}.$$

L'anneau $E_\infty^{*0,q}$ s'identifie au quotient de $H^q(E, G) = D^{*0,q}$ par $D^{*1,q-1}$, et, si l'on compose les homomorphismes:

$$H^q(F, G) \leftarrow E_\infty^{*0,q} \leftarrow H^q(E, G),$$

on trouve l'homomorphisme transposé de l'injection: $F \rightarrow E$.

On notera par ailleurs que $E_2^{*0,q} = H^0(B, H^q(F, G))$ est identique au sous-anneau de $H^q(F, G)$ formé des éléments laissés fixes par les transformations T_α, $\alpha \in \pi_1(B)$.

b. *Cohomologie de la base.*

On a: $E_2^{*p,0} = H^p(B, H^0(F, G)) = H^p(B, G)$.

Comme les éléments de $E_r^{*r,0}$ sont de degré-fibre minimum, ce sont tous des d_r-cocycles $(r \geqq 2)$, d'où la suite d'homomorphismes *sur*:

$$H^p(B, G) = E_2^{*p,0} \rightarrow E_3^{*p,0} \rightarrow \cdots \rightarrow E_{p+1}^{*p,0} = E_{p+2}^{*p,0} = \cdots = E_\infty^{*p,0}.$$

L'anneau $E_\infty^{*p,0}$ s'identifie au sous-anneau $D^{*p,0}$ de $H^p(E, G)$, et si l'on compose les homomorphismes:

$$H^p(B, G) \rightarrow E_\infty^{*p,0} \rightarrow H^p(E, G),$$

on trouve l'homomorphisme transposé de la projection $p: E \rightarrow B$.

c. *La transgression.*

Elle applique un sous-groupe de $H^{n-1}(F, G)$ dans un quotient de $H^n(B, G)$ ($n \geqq 2$). Elle peut être définie, soit comme la différentielle $d_n : E_n^{*0,n-1} \to E_n^{*n,0}$, soit par passage au quotient à partir des deux homomorphismes canoniques:

$$H^{n-1}(F, G) \xrightarrow{\delta} H^n(E \text{ mod. } F, G) \xleftarrow{p^*} H^n(B, G).$$

En dehors des propriétés duales de celles déjà vues en homologie, signalons ceci: *La transgression* (et aussi la suspension) *commute avec les opérations Sq^i de Steenrod.*

Cela résulte par des raisonnements formels de la commutativité du diagramme:

$$\begin{array}{ccccc} H^{n-1}(F, G) & \to & H^n(E \text{ mod. } F, G) & \leftarrow & H^n(B, G) \\ \mathrm{Sq}^i \big\downarrow & & \mathrm{Sq}^i \big\downarrow & & \mathrm{Sq}^i \big\downarrow \\ H^{i+n-1}(F, G) & \to & H^{i+n}(E \text{ mod. } F, G) & \leftarrow & H^{i+n}(B, G) \end{array}$$

(G désigne ici le groupe additif des entiers mod. 2). En particulier, le carré d'un élément transgressif de $H^*(F)$ est un élément transgressif (en cohomologie modulo 2). (Bien entendu, des résultats analogues sont valables pour les "puissances réduites" de Steenrod.)

10. Transformation du second terme des suites spectrales d'homologie et de cohomologie

Dans ce n° nous supposerons que les systèmes locaux formés sur B par les groupes d'homologie et de cohomologie de F sont triviaux. Comme on pourra s'en convaincre par la suite, c'est de beaucoup le cas le plus important pour les applications.

Sous cette hypothèse, nous allons montrer comment, dans certains cas, on peut remplacer les expressions déjà trouvées pour $E_2^{p,q}$ et $E_2^{*p,q}$ par des expressions d'un maniement plus commode.

a. *Cas de l'homologie.*

Supposons que G soit un *anneau principal* (par exemple, l'anneau Z des entiers, ou bien un corps commutatif). Le groupe abélien $C(E, G)$ peut alors être muni d'une structure de G-module unitaire, ainsi que les groupes $E_r^{p,q}$, $D^{p,q}$, etc. En particulier, la formule $E_2^{p,q} = H_p(B, H_q(F, G))$ exprime un isomorphisme de G-modules. Appliquant alors la formule des coefficients universels, on trouve:

$$E_2^{p,q} = H_p(B, G) \otimes H_q(F, G) + \operatorname{Tor}(H_{p-1}(B, G), H_q(F, G)),$$

ou le produit tensoriel est pris *sur l'anneau G*, et où le signe Tor désigne le produit de torsion (ou "produit dual") de Cartan-Eilenberg [7].

Puisque $\operatorname{Tor}(L, M) = 0$ si L ou M est sans torsion, on a:

Proposition 7. *Si $H_{p-1}(B, G)$ ou $H_q(F, G)$ est sans torsion, on a: $E_2^{p,q} = H_p(B, G) \otimes H_q(F, G)$, le produit tensoriel étant pris sur G.*

(On notera que la condition est toujours remplie si G est un *corps*).

b. *Cas de la cohomologie.*

Supposons encore G principal, et soit M un G-module unitaire. On a un homorphisme canonique:

$$\iota : H^p(B, G) \otimes M \to H^p(B, M)$$

défini ainsi:

Soit $h \otimes m \in H^p(B, G) \otimes M$, et soit $x(u)$ un cocycle de la classe h. L'application $u \to x(u) \cdot m$ est un cocycle sur B à valeurs dans M, dont la classe est, par définition, $\iota(h \otimes m)$.

Si $N = \sum M_q$ est une algèbre graduée on définit ainsi un homomorphisme

$$\iota : H^*(B, G) \otimes N \to \sum_{p,q} H^p(B, M_q).$$

Munissons le premier membre de la structure d'algèbre produit tensoriel des structures d'algèbres de $H^*(B, G)$ et de N, et le second de la structure d'algèbre définie par le cup-product sur B, à valeurs dans l'algèbre N (produit $\vee$ du n° 8); l'homomorphisme ι est alors multiplicatif; il le reste donc quand on change les signes dans les deux membres, au moyen de la formule (5) (ce qui revient à munir le premier membre de la structure d'algèbre produit tensoriel *gauche* des structures d'algèbre de $H^*(B, G)$ et de N).

Ceci étant, donnons deux conditions suffisantes pour que ι soit un isomorphisme sur:

α. *M est libre de type fini.*

Les deux membres dépendant additivement de M, il suffit de vérifier notre affirmation lorsque $M = G$, auquel cas le résultat est immédiat.

β. *$H_{p-1}(B, G)$ et $H_p(B, G)$ sont libres et $H_p(B, G)$ est de type fini.*

Puisque $H_{p-1}(B, G)$ est libre, on peut identifier $H^p(B, G)$ au module Hom $(H_p(B, G), G)$ et $H^p(B, M)$ à Hom $(H_p(B, G), M)$, d'après la formule des coefficients universels en cohomologie. L'homomorphisme ι se transporte alors en l'homomorphisme canonique:

$$\iota' : \text{Hom } (H_p(B, G), G) \otimes M \to \text{Hom } (H_p(B, G), M).$$

Puisque $H_p(B, G)$ est libre de type fini, on peut supposer, à cause de l'additivité des opérations $\otimes$ et Hom, qu'il est isomorphe à G lui-même, et, dans ce cas, le résultat est immédiat.

Appliquons ce qui précède au cas où $M_q = H^q(F, G)$. On obtient:

Proposition 8. *Soit G un anneau principal; pour que l'algèbre E_2^*, second terme de la suite spectrale de cohomologie de l'espace fibré E, soit isomorphe au produit tensoriel gauche* (sur G) $H^*(B, G) \otimes H^*(F, G)$, *il suffit que l'une ou l'autre des deux conditions suivantes soit remplie*:

α. *$H^q(F, G)$ est un G-module libre de type fini pour tout $q \geqq 0$,*

β. *$H_p(B, G)$ est un G-module libre de type fini pour tout $p \geqq 0$.*

(Rappelons que ce résultat n'est applicable que si le système local formé par $H^q(F, G)$ sur B est trivial pour tout $q \geqq 0$).

Si G est un corps, on peut énoncer ainsi les conditions α et β:

α. $H^q(F, G)$ est de dimension finie sur G pour tout $q \geqq 0$,

β. $H^p(B, G)$ est de dimension finie sur G pour tout $p \geqq 0$.

Note. Il y a ici une différence importante avec la théorie de Leray: dans cette dernière, si les coefficients sont pris dans un corps, et si le système local de cohomologie de la fibre est trivial sur la base, le terme E_2^* est *toujours* isomorphe à $H^*(B) \otimes H^*(F)$. Cela tient au fait que Leray utilise une cohomologie *à supports compacts*.

11. Démonstration du lemme 4

Le reste de ce chapitre est consacré à la démonstration des lemmes 3, 4, 5; nous commençons par le lemme 4.

La démonstration procède par récurrence sur l'entier q.

Première partie—$q = 0$.

Le cube v est donc réduit au point x et le problème est le suivant: étant donnée une application $u:I^p \to B$, qui envoie tous les sommets de I^p en b, trouver une application $w:I^p \to E$, qui envoie tous les sommets de I^p en x et qui soit telle que $p\circ w = u$.

Posons $X = I^p$, et $A = \{\omega\}$ (ω, dans toute la suite, désignera le point $(0, \cdots, 0)$). En appliquant la Prop. 1 au couple (X, A), on trouve une application $w':I^p \to E$, telle que $p\circ w' = u$ et que $w'(\omega) = x$. Soient s_α les différents sommets de I^p, et posons $f_\alpha = w'(s_\alpha)$; on a $f_\alpha \in F$, et, puisque F est *connexe par arcs*, il existe des applications $g_\alpha:I \to F$, telles que $g_\alpha(0) = f_\alpha$ et $g_\alpha(1) = x$. Nous allons utiliser ces chemins pour déformer le cube w' en un cube w de même projection et dont tous les sommets seront en x.

Pour cela, posons $X = I^p \times I$, $A = I^p \times \{0\} \cup \{s_\alpha\} \times I$. On voit tout de suite que A est contractile. Avec les notations de la Prop. 1, nous définirons $f:I^p \times I \to B$ par: $f(x_1, \cdots, x_p, t) = u(x_1, \cdots, x_p)$ et $g:A \to E$ de la façon suivante:

$$\text{sur } I^p \times \{0\} \text{ par : } g(x_1, \cdots, x_p, 0) = w'(x_1, \cdots, x_p)$$
$$\text{sur } \{s_\alpha\} \times I \text{ par : } g(s_\alpha ; t) = g_\alpha(t).$$

Appliquant alors la Prop. 1, on trouve une application $h:I^p \times I \to E$ qui prolonge g et est telle que $p\circ h = f$. Le cube $w:I^p \to E$, défini par $w(x) = h(x; 1)$ répond alors à la question.

Deuxième partie—passage de $q - 1$ à q.

On suppose que $q \geqq 1$ et que, pour tout $q' < q$, on a construit une fonction $K(u, v)$ vérifiant les conditions 1.2.3.; il s'agit de construire K lorsque v est de dimension q.

Premier cas: v est dégénéré.

Le cube v ne dépend donc pas de sa dernière variable. Soit v' le cube de dimension $q - 1$ défini par:
$v'(x_1, \cdots, x_{q-1}) = v(x_1, \cdots, x_q)$. On notera que $v' = \lambda_q^0 v = \lambda_q^1 v$. Définissons alors $K(u, v)$ par la formule:

$$K(u, v)(x_1, \cdots, x_n) = K(u, v')(x_1, \cdots, x_{n-1}).$$

D'après sa définition même, le cube $K(u, v)$ est dégénéré; reste à montrer qu'il vérifie les conditions 1. et 2.:

$$\begin{aligned} BK(u, v)(x_1, \cdots, x_p) &= p \circ K(u, v)(x_1, \cdots, x_p, y_1, \cdots, y_q) \\ &= p \circ K(u, v')(x_1, \cdots, x_p, y_1, \cdots, y_{q-1}) \\ &= u\,(x_1, \cdots, x_p), \\ FK(u, v)(x_1, \cdots, x_q) &= K(u, v)\,(0, \cdots, 0, x_1, \cdots, x_q) \\ &= K(u, v')(0, \cdots, 0, x_1, \cdots, x_{q-1}) \\ &= v'(x_1, \cdots, x_{q-1}) = v(x_1, \cdots, x_q). \end{aligned}$$

La condition 1. est donc bien vérifiée.
Pour calculer $\lambda_{i+p}^{\varepsilon} K(u, v)$ nous distinguerons deux cas:

$$\begin{aligned} i = q - \lambda_{i+p}^{\varepsilon} K(u, v)(x_1, \cdots, x_{n-1}) &= K(u, v)(x_1, \cdots, x_{n-1}, \varepsilon) \\ &= K(u, v')(x_1, \cdots, x_{n-1}) \\ &= K(u, \lambda_i^{\varepsilon} v)(x_1, \cdots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

puisque $v' = \lambda_q^{\varepsilon} v$;

$i < q -$

$$\begin{aligned} \lambda_{i+p}^{\varepsilon} K(u, v)(x_1, \cdots, x_{n-1}) &= K(u, v)(x_1, \cdots, x_{i+p-1}, \varepsilon, x_{i+p}, \cdots, x_{n-1}) \\ &= K(u, v') \\ &\qquad (x_1, \cdots, x_{i+p-1}, \varepsilon, x_{i+p}, \cdots, x_{n-2}) \\ &= \lambda_{i+p}^{\varepsilon} K(u, v')(x_1, \cdots, x_{n-2}) \\ &= K(u, \lambda_i^{\varepsilon} v')(x_1, \cdots, x_{n-2}); \end{aligned}$$

mais d'autre part, le cube $\lambda_i^{\varepsilon} v$ est dégénéré puisque $i < q$, et on a:

$$\begin{aligned} K(u, \lambda_i^{\varepsilon} v)(x_1, \cdots, x_{n-1}) &= K(u, \lambda_i^{\varepsilon} v)(x_1, \cdots, x_{n-2}, \varepsilon) \\ &= \lambda_{n-1}^{\varepsilon} K(u, \lambda_i^{\varepsilon} v)(x_1, \cdots, x_{n-2}) \\ &= K(u, \lambda_{n-p-1}^{\varepsilon} \lambda_i^{\varepsilon} v)(x_1, \cdots, x_{n-2}). \end{aligned}$$

Or $\lambda_{n-p-1}^{\varepsilon} \lambda_i^{\varepsilon} v = \lambda_{q-1}^{\varepsilon} \lambda_i^{\varepsilon} v = \lambda_i^{\varepsilon} \lambda_q^{\varepsilon} v = \lambda_i^{\varepsilon} v'$, ce qui achève la vérification de la propriété 2.

Deuxième cas: v n'est pas dégénéré.

Nous allons transformer le problème de la construction du cube $w = K(u, v)$ en un problème de *relèvement* d'application, problème que nous résoudrons au moyen de la Prop. 1.

Posons $X = I^p \times I^q$, $A = \{\omega\} \times I^q \cup I^p \times D(I^q)$, où $D(I^q)$ désigne la frontière de I^q. L'ensemble A est contractile, car il est visiblement rétractile sur $\{\omega\} \times I^q \cup \{\omega\} \times D(I^q) = \{\omega\} \times I^q$.

Définissons alors $f:X \to B$ par:

$$f(x_1, \cdots, x_p, y_1, \cdots, y_q) = u(x_1, \cdots, x_p);$$

définissons $g:A \to E$ de la façon suivante:

sur $\{\omega\} \times I^q$ par: $g(0, \cdots, 0, y_1, \cdots, y_q) = v(y_1, \cdots, y_q)$

sur $I^p \times D(I^q)$ par: $g(x_1, \cdots, x_p, y_1, \cdots, y_{i-1}, \varepsilon, \cdots, y_{q-1}) = K(u, \lambda_i^\varepsilon v)(x_1, \cdots, x_p, y_1, \cdots, y_{q-1})$.

Admettons pour un instant que l'application g ainsi définie soit continue; on peut alors appliquer la Prop. 1, et on en tire l'existence d'une application $w:X \to E$, prolongeant g, et telle que $p \circ w = f$. Il est clair que w est un cube qui remplit les conditions 1. et 2.; en outre, *puisque* $q \geqq 1$, tous les sommets de $I^p \times I^q$ sont contenus dans $I^p \times D(I^q)$ et sont donc appliqués en x (car $K(u, \lambda_i^\varepsilon v)$ est lui-même un cube dont tous les sommets sont en x, d'après l'hypothèse de récurrence).

Il nous reste simplement à montrer que l'application g est continue, c'est-à-dire que les diverses définitions de g, données sur certaines faces du cube $I^p \times I^q$, sont compatibles sur les intersections de ces faces deux à deux.

Compatibilité sur $(\{\omega\} \times I^q) \cap (I^p \times D(I^q))$.

Considérons le point $(0, \cdots, 0, y_1, \cdots, y_{i-1}, \varepsilon, y_i, \cdots, y_{q-1})$. Les deux définitions de g en ce point sont les suivantes:

$$v(y_1, \cdots, y_{i-1}, \varepsilon, y_i, \cdots, y_{q-1}) = \lambda_i^\varepsilon v(y_1, \cdots, y_{q-1}),$$

et:

$$K(u, \lambda_i^\varepsilon v)(0, \cdots, 0, y_1, \cdots, y_{q-1}) = FK(u, \lambda_i^\varepsilon v)(y_1, \cdots, y_{q-1}).$$

Mais d'après l'hypothèse de récurrence, on a bien: $\lambda_i^\varepsilon v = FK(u, \lambda_i^\varepsilon v)$.

Compatibilité sur $I^p \times D(I^q)$.

Considérons le point $(x_1, \cdots, x_p, y_1, \cdots, \varepsilon, \cdots, \varepsilon', \cdots, y_{q-2})$, où ε est à la i-ème place et ε' à la i'-ème $(i < i')$. Les deux définitions de g en ce point sont les suivantes:

$$K(u, \lambda_{i-p}^\varepsilon v)(x_1, \cdots, x_p, y_1, \cdots, \varepsilon', \cdots, y_{q-2}) = \lambda_{i'-1}^{\varepsilon'} K(u, \lambda_{i-p}^\varepsilon v)(x_1, \cdots, y_{q-2})$$

$$K(u, \lambda_{i'-p}^{\varepsilon'} v)(x_1, \cdots, x_p, y_1, \cdots, \varepsilon, \cdots, y_{q-2}) = \lambda_i^\varepsilon K(u, \lambda_{i'-p}^{\varepsilon'} v)(x_1, \cdots, y_{q-2}).$$

Mais d'après l'hypothèse de récurrence, on a:

$$\lambda_{i'-1}^{\varepsilon'} K(u, \lambda_{i-p}^\varepsilon v) = K(u, \lambda_{i'-p-1}^{\varepsilon'} \lambda_{i-p}^\varepsilon v)$$

et

$$\lambda_i^{\varepsilon} K(u, \lambda_{i'-p}^{\varepsilon'} v) = K(u, \lambda_{i-p}^{\varepsilon} \lambda_{i'-p}^{\varepsilon'} v).$$

L'identité des deux définitions de g résulte alors de l'égalité:

$$\lambda_{i'-p-1}^{\varepsilon'} \lambda_{i-p}^{\varepsilon} = \lambda_{i-p}^{\varepsilon} \lambda_{i'-p}^{\varepsilon'}.$$

La démonstration du lemme 4 est donc achevée.

12. Démonstration du lemme 5

La démonstration étant tout à fait analogue à celle du lemme 4, nous en indiquerons seulement les points essentiels.

Nous raisonnerons par récurrence sur l'entier q.

Première partie—$q = 0$.

Posons $X = I^p \times I$ et $A = (I^p \times \{0\}) \cup (I^p \times \{1\}) \cup (\{\omega\} \times I)$. Il est clair que A est contractile.

Définissons alors $f: X \to B$ par $f(x; t) = p \circ u(x)$, $x \in I^p$, et $g: A \to E$ de la façon suivante:

sur $I^p \times \{0\}$ par: $g(x; 0) = u(x)$
sur $I^p \times \{1\}$ par: $g(x; 1) = K(Bu, Fu)(x)$
sur $\{\omega\} \times I$ par: $g(\omega; t) = x$.

Ces applications sont compatibles et définissent donc une application g qui est continue. En utilisant alors la Prop. 1, on obtient une application $h: I^p \times I \to E$, prolongeant g, et telle que $p \circ h = f$. Nous poserons $Su = h$.

Deuxième partie—passage de $q - 1$ à q.

Premier cas: u est dégénéré.

Soit $u' = \lambda_n^0 u = \lambda_n^1 u$. On pose: $Su(x_1, \cdots, x_{n+1}) = Su'(x_1, \cdots, x_n)$, et on vérifie aisément, compte tenu de l'hypothèse de récurrence, que le cube obtenu vérifie toutes les propriétés requises.

Deuxième cas—u n'est pas dégénéré.

Posons $X = I^p \times I \times I^q$, et:
$A = (I^p \times \{0\} \times I^q) \cup (I^p \times \{1\} \times I^q) \cup (I^p \times I \times D(I^q)) \cup (\{\omega\} \times I \times I^q)$.
On vérifie que A est contractile, puis on définit $f: X \to B$ par: $f(x; t; y) = Bu(x)$, et $g: A \to E$ de la façon suivante:

sur $I^p \times \{0\} \times I^q$: $g(x; 0; y) = u(x; y)$
sur $I^p \times \{1\} \times I^q$: $g(x; 1; y) = K(Bu, Fu)(x; y)$
sur $I^p \times I \times D(I^q)$: $g(x; t; y_1, \cdots, y_{i-1}, \varepsilon, \cdots, y_{q-1}) = S\lambda_{p+i}^{\varepsilon} u(x; t; y_1, \cdots, y_{q-1})$
sur $\{\omega\} \times I \times I^q$: $g(\omega; t; y) = u(\omega; y) = Fu(y)$.

Il résulte de l'hypothèse de récurrence que ces diverses définitions sont compatibles, ce qui permet d'appliquer la Prop. 1 et d'obtenir une application

$h: X \to E$, prolongeant g, et telle que $p \circ h = f$. En posant $Su = h$, on obtient un cube qui vérifie visiblement toutes les propriétés requises.

13. Démonstration du lemme 3

Soit v un lacet sur B; posons $C(u) = K(u, v)$, K étant l'application dont le lemme 4 établit l'existence.

La propriété 1. de l'opération K signifie que C vérifie les proprietés 1. et 2. d'une construction subordonnée à v; la propriété 2. de K signifie que C vérifie la propriété 3. d'une construction; la propriété 3. de K signifie que C vérifie la propriété 4. d'une construction. L'existence d'au moins une construction est donc établie.

Pour montrer la deuxième partie du lemme 3, nous utiliserons le lemme suivant:

LEMME 7. *Soit $h: I^2 \to B$ un cube de dimension 2 de B tel que $h(0, t') = h(1, t') = b$ pour tout $t' \in I$. Posons $v_1(t) = h(t, 0)$, $v_2(t) = h(t, 1)$; v_1 et v_2 sont donc des lacets homotopes de B. Soient C_1 et C_2 deux constructions subordonnées aux lacets v_1 et v_2 respectivement. Pour tout cube u de dimension n de F, il existe alors un cube de E, Hu, de dimension $n + 2$ et de filtration $\leqq 2$, tel que:*

1. $BHu = h$
2. $\lambda_1^0 Hu(t, y_1, \cdots, y_n) = u(y_1, \cdots, y_n)$
3. $\lambda_2^0 Hu = C_1 u$; $\lambda_2^1 Hu = C_2 u$
4. $H\lambda_i^\varepsilon u = \lambda_{i+2}^\varepsilon Hu$ ($\varepsilon = 0, 1$, $1 \leqq i \leqq n$)
5. *Si u est dégénéré, Hu l'est aussi.*

Admettons pour un instant ce lemme, et considérons les endomorphismes $S_{C_1} = S_1$, $S_{C_2} = S_2$, définis par les constructions C_1 et C_2 comme il a été dit au n° 3. Soit $k(u)$ l'endomorphisme de degré $+1$ des chaînes de F défini par: $k(u)(t, x_1, \cdots, x_n) = Hu(1, t, x_1, \cdots, x_n)$.
Si l'on calcule $dku + kdu$, on trouve:
$dku + kdu = S_2 u - S_1 u$, ce qui montre bien que S_1 et S_2 sont homotopiquement équivalents.
Il nous reste donc simplement à donner la

Démonstration du lemme 7.

Comme elle est tout à fait analogue à celle du lemme 4, nous nous bornerons à en donner les points essentiels.

On raisonne par récurrence sur l'entier n.

Première partie—$n = 0$.

Le cube u est donc le cube ponctuel réduit au point x. Le cube Hu sera un cube de dimension 2 de E.

Posons $X = I^2$, $A = (I \times \{0\}) \cup (I \times \{1\}) \cup (\{0\} \times I)$; A est contractile.

Définissons $f: X \to B$ par: $f = h$.

Définissons $g: A \to E$ de la manière suivante:

sur $I \times \{0\}: g(t, 0) = C_1 u(t)$
sur $I \times \{1\}: g(t, 1) = C_2 u(t)$
sur $\{0\} \times I: g(0, t') = x$.

On peut alors appliquer la Prop. 1 et l'on obtient une application $w: X \to E$, telle que $p \circ w = f$, et qui prolonge g; on pose $Hu = w$.

Deuxième partie—passage de $n - 1$ à n.

Premier cas—u est dégénéré.

Si $u' = \lambda_n^0 u = \lambda_n^1 u$, on pose:

$$Hu(t, t', x_1, \cdots, x_n) = Hu'(t, t', x_1, \cdots, x_{n-1}),$$

et l'on vérifie aisément, compte tenu de l'hypothèse de récurrence, que le cube Hu ainsi construit possède les propriétés requises.

Deuxième cas—u n'est pas dégénéré.

Posons $X = I^2 \times I^n$ et:

$A = (I \times \{0\} \times I^n) \cup (I \times \{1\} \times I^n) \cup (\{0\} \times I \times I^n) \cup (I \times I \times D(I^n))$

On vérifie que A est contractile.

On définit $f: X \to B$ par $f(t, t', x_1, \cdots, x_n) = h(t, t')$ et $g: A \to E$ de la façon suivante:

sur $I \times \{0\} \times I^n$: $g(t, 0, x_1, \cdots, x_n) = C_1 u(t, x_1, \cdots, x_n)$

sur $I \times \{1\} \times I^n$: $g(t, 1, x_1, \cdots, x_n) = C_2 u(t, x_1, \cdots, x_n)$

sur $\{0\} \times I \times I^n$: $g(0, t, x_1, \cdots, x_n) = u(x_1, \cdots, x_n)$

sur $I \times I \times D(I^n)$: $g(t, t', x_1, \cdots, x_{i-1}, \varepsilon, \cdots, x_{n-1}) = H\lambda_i^\varepsilon u(t, t', x_1, \cdots, x_{n-1})$.

Il résulte de l'hypothèse de récurrence que ces diverses définitions sont compatibles, ce qui permet d'appliquer la Prop. 1 et d'obtenir une application $w: X \to E$, prolongeant g, et telle que $p \circ w = f$. En posant $Hu = w$, on obtient un cube qui vérifie les propriétés requises.

Ceci achève la démonstration du lemme 3.

Remarque importante.

Dans le cas des espaces fibrés localement triviaux, on peut donner des démonstrations beaucoup plus courtes des lemmes 3, 4, 5, 7. Pour cela, soit $u: I^p \to B$ un cube singulier de B, et introduisons l'espace fibré E' *image réciproque* de E par l'application u (Cf. [5], Exp. VII et VIII). Il suffit alors de faire *dans* E' les constructions exigées dans les lemmes en question, ce qui est très facile, vu que E' est le produit direct de I^p par F, d'après un théorème de Feldbau.

Chapitre III. Applications de la suite spectrale des espaces fibrés

Ce chapitre rassemble quelques applications simples de la suite spectrale des espaces fibrés. Les résultats qui s'y trouvent sont, pour la plupart, connus, mais sous des hypothèses différentes, et inapplicables aux espaces de lacets. Aussi avons-nous dû en reproduire les démonstrations.

Notations

Dans tout ce qui suit, (E, p, B) désignera un espace fibré (au sens du Chapitre II, n° 2) de fibre F et de base B *connexes par arcs*. Les termes de la suite spectrale de *cohomologie* de E seront notés $E_r^{p,q}$ (au lieu de $E_r^{*p,q}$) lorsqu'aucune confusion avec l'homologie ne sera à craindre; cette convention sera également utilisée dans les chapitres suivants.

1. Première application

PROPOSITION 1. *Soit A un anneau principal, et supposons que le système local formé par $H_i(F, A)$ sur B soit trivial pour tout i. Alors, si deux des trois espaces E, F, B jouissent de la propriété que leurs groupes d'homologie à valeurs dans A sont des A-modules de type fini en toute dimension, le troisième espace jouit de la même propriété.*

(Rappelons qu'un A-module est dit *de type fini* s'il est engendré par un nombre fini d'éléments).

(a) Supposons d'abord que les deux espaces en question soient B et F. Chaque module $E_2^{p,q} = H_p(B, H_q(F, A))$ est alors de type fini d'après la formule des coefficients universels (Chap. II, n°10). Puisque E_3 est isomorphe au module d'homologie de E_2, muni de la différentielle d_2, $E_3^{p,q}$ est aussi de type fini, et de même $E_4^{p,q}, \cdots$, etc. Il en résulte que $\sum_{p+q=n} E_\infty^{p,q}$, module gradué associé à $H_n(E, A)$, est de type fini, donc aussi $H_n(E, A)$.

(b) Supposons que les deux espaces en question soient E et B. Nous allons montrer que $H_i(F, A)$ est un A-module de type fini par récurrence sur l'entier i, à partir de $i = 0$. Supposons que $H_i(F, A) = E_2^{0,i}$ ne soit pas de type fini; alors $E_3^{0,i}$ ne sera pas non plus de type fini. En effet, $E_3^{0,i}$ est isomorphe au quotient de $E_2^{0,i}$ par l'image de la différentielle $d_2 : E_2^{2,i-1} \to E_2^{0,i}$, et cette image est de type fini puisque $E_2^{2,i-1} = H_2(B, H_{i-1}(F, A))$ est lui-même de type fini d'après l'hypothèse de récurrence. On montre par le même raisonnement que $E_4^{0,i}, \cdots, E_r^{0,i}, \cdots$, n'est pas non plus de type fini. Mais ceci est absurde, car, en prenant r assez grand, $E_r^{0,i}$ est isomorphe à un sous-module du module gradué associé à $H_i(E, A)$, donc doit être de type fini, d'après l'hypothèse faite sur E.

(c) Supposons enfin que les deux espaces en question soient E et F. Nous allons montrer que $H_i(B, A)$ est un A-module de type fini par récurrence sur l'entier i, à partir de $i = 0$. Supposons que $H_i(B, A) = E_2^{i,0}$ ne soit pas de type fini; alors il en est de même de $E_3^{i,0}$, car ce module est isomorphe au noyau de la différentielle $d_2 : E_2^{i,0} \to E_2^{i-2,1}$, et ce dernier module étant isomorphe à $H_{i-2}(B, H_1(F, A))$ est de type fini d'après l'hypothèse de récurrence. On montre par le même raisonnement que $E_4^{i,0}, \cdots, E_r^{i,0}, \cdots$ n'est pas non plus de type fini. Mais ceci est absurde, car, en prenant r assez grand, $E_r^{i,0}$ est isomorphe à un sous-module du module gradué associé à $H_i(E, A)$, donc doit être de type fini, d'après l'hypothèse faite sur E.

REMARQUE. Supposons que A soit un *corps*, et désignons par b_i, f_i, e_i les dimensions des espaces vectoriels (sur A) $H_i(B, A)$, $H_i(F, A)$ et $H_i(E, A)$

respectivement. La partie (a) de la démonstration précédente montre que l'on a l'inégalité:

$$e_n \leqq \sum_{p+q=n} b_p \cdot f_q .$$

On trouvera dans [24], outre l'inégalité précédente, des inégalités relatives aux cas (b) et (c).

2. Caractéristique d'Euler-Poincaré des espaces fibrés

Soit k un corps commutatif, et continuons à noter e_i, b_i, f_i les dimensions des k-espaces vectoriels $H_i(E, k)$, $H_i(B, k)$, $H_i(F, k)$. Si ces nombres sont finis pour tout i, et nuls pour i assez grand, on peut définir les *caractéristiques d'Euler-Poincaré* de E, B, F (que nous noterons $\chi(E)$, $\chi(B)$, $\chi(F)$) par les formules habituelles:

$$\chi(E) = \sum_i (-1)^i e_i, \qquad \chi(B) = \sum_i (-1)^i b_i, \qquad \chi(F) = \sum_i (-1)^i f_i$$

On a alors (Cf. [24], Corollaire 9.1):

PROPOSITION 2. *Soit k un corps commutatif, et supposons:*
(a) *que le système local formé par $H_i(F, k)$ sur B soit trivial pour tout $i \geqq 0$,*
(b) *que les nombres b_i, f_i soient finis pour tout i et nuls pour i assez grand.*

Dans ces conditions, les caractéristiques d'Euler-Poincaré de E, B, F vérifient la relation: $\chi(E) = \chi(B) \cdot \chi(F)$.

Nous pouvons définir les caractéristiques d'Euler-Poincaré des divers termes $E_2, \cdots, E_\infty$ de la suite spectrale, puisque ce sont des espaces vectoriels *gradués* (par le degré total) et *de dimension finie* (puisque $E_2 = H(B, k) \otimes H(F, k)$ est de dimension finie).

Cette dernière propriété entraine que les d_r sont nuls pour r assez grand, donc que $E_r = E_\infty$ pour r assez grand. On a donc: $\chi(E) = \chi(E_\infty) = \chi(E_r)$, pour r assez grand.

D'autre part, $\chi(E_2) = \chi(H(B, k) \otimes H(F, k)) = \chi(B) \cdot \chi(F)$.

Enfin, puisque E_{r+1} est l'espace vectoriel d'homologie de E_r muni d'une différentielle de degré -1 (pour le degré total), un raisonnement classique montre que $\chi(E_{r+1}) = \chi(E_r)$. On a donc en définitive:

$$\chi(B) \cdot \chi(F) = \chi(E_2) = \chi(E_3) = \cdots = \chi(E_r) = \cdots = \chi(E_\infty) = \chi(E), \text{ cqfd.}$$

REMARQUE. Si B est un *polyèdre fini*, la condition (a) est superflue. En effet, on a de toutes façons $\chi(E) = \chi(E_2)$; mais $E_2 = H(B, H(F, k))$ est le groupe d'homologie de $E'_1 = C'(B, k) \otimes H(F, k)$, où $C'(B, k)$ désigne l'espace vectoriel des chaînes *simpliciales* de B à coefficients dans k. Vu l'hypothèse faite, $C'(B, k)$ est de dimension finie, et l'on a: $\chi(E_2) = \chi(E'_1) = \chi(C'(B, k)) \cdot \chi(F) = \chi(B) \cdot \chi(F)$, ce qui établit le résultat annoncé.

Par contre, dans le cas général, j'ignore si la condition (a) est superflue ou non.

3. Fibrations des espaces euclidiens

PROPOSITION 3. *Soit k un corps et supposons que le système local formé par $H_i(F, k)$ sur B soit trivial pour tout $i \geqq 0$. Supposons en outre que $H_i(B, k) = 0$*

pour $i > p$, *et que* $H_i(F, k) = 0$ *pour* $i > q$. *Alors* $H_i(E, k) = 0$ *pour* $i > p + q$, *et* $H_{p+q}(E, k)$ *est isomorphe au produit tensoriel (sur* k*)* $H_p(B, k) \otimes H_q(F, k)$.

(*Voir* [24], n° 9 ainsi que [2]).

D'après la Prop. 7 du Chap. II, $E_2^{i,j}$ est isomorphe au produit tensoriel (sur k): $H_i(B, k) \otimes H_j(F, k)$. Il en résulte que $E_r^{i,j} = 0$ dès que $i > p$, ou $j > q$ ($r = 2, 3, \cdots, \infty$). En particulier, tous les termes de E_∞ dont le degré total est strictement supérieur à $p + q$ sont nuls, ce qui démontre la première partie de la proposition.

Reste à voir que $H_{p+q}(E, k)$ est isomorphe à $H_p(B, k) \otimes H_q(F, k)$. Pour cela, remarquons que les éléments de $E_r^{p,q} (r \geqq 2)$ jouissent des deux propriétés suivantes:

(a) Tout élément de $E_r^{p,q}$ est un cycle pour d_r, puisqu'il est de degré-fibre maximum et que d_r augmente le degré-fibre.

(b) Aucun élément $\neq 0$ de $E_r^{p,q}$ n'est un bord pour d_r, puisqu'il est de degré-base maximum, et que d_r diminue le degré-base.

De ces deux propriétés il résulte que $E_2^{p,q} = E_3^{p,q} = \cdots = E_\infty^{p,q}$.

Comme nous avons déjà vu que les autres termes de E_∞, de degré total $p + q$ sont nuls, il suit de là que:

$$H_{p+q}(E, k) = E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q} = H_p(B, k) \otimes H_q(F, k), \qquad \text{cqfd.}$$

Corollaire. *Soit* k *un corps; supposons que le système local formé par* $H_i(F, k)$ *sur* B *soit trivial pour tout* $i \geqq 0$, *et que* $H_i(E, k) = 0$ *pour tout* $i > 0$. *Alors:*

(α) *ou bien* $H_i(B, k) = H_i(F, k) = 0$ *pour tout* $i > 0$,

(β) *ou bien* $H_i(B, k) \neq 0$ *pour une infinité de valeurs de* i,

(γ) *ou bien* $H_i(F, k) \neq 0$ *pour une infinité de valeurs de* i.

Résulte immédiatement de la proposition qui précède et du fait qu'un produit tensoriel d'espaces vectoriels n'est nul que si l'un des espaces est nul.

Proposition 4. *Supposons que l'espace euclidien* $E = R^n$ *soit un espace fibré localement trivial de fibre* F *et de base* B, F *étant connexe. Alors* F *et* B *sont acycliques:* $H_i(B, Z) = H_i(F, Z) = 0$ *pour tout* $i > 0$ (Z désignant l'anneau des entiers).

Puisque la fibration est localement triviale, F et B sont localement contractiles et de dimension $\leqq n$. Il s'ensuit que $H_i(F, Z)$ et $H_i(B, Z)$ sont nuls pour $i > n$ (*Voir*, par exemple, [4], Exp. XVI, n° 7). Comme F est connexe par arcs, il résulte de la suite exacte d'homotopie que $\pi_1(B) = 0$, donc que le système local des $H_i(F, k)$ (k étant un corps commutatif quelconque) est trivial sur B. On est donc dans les conditions d'application du corollaire précédent; comme les cas (β) et (γ) sont exclus d'après ce qui précède, on a donc: $H_i(B, k) = H_i(F, k) = 0$ pour tout corps k et tout $i > 0$. La démonstration sera donc achevée si l'on prouve le lemme suivant:

Lemme. *Soit* Y *un espace topologique tel que* $H_i(Y, k) = 0$ *pour tout corps* k *et tout entier* i *tel que* $0 < i \leqq q$. *Alors* $H_i(Y, Z) = 0$ *pour tout entier* i *tel que* $0 < i \leqq q - 1$.

D'après la formule des coefficients universels, on a:

$$H_i(Y, k) = H_i(Y, Z) \otimes k + \mathrm{Tor}(H_{i-1}(Y, Z), k),$$

où le signe $+$ désigne une somme directe, et où les opérations $\otimes$ et Tor sont relatives à l'anneau principal Z (Cf. [7]). Désignons alors par M l'un quelconque des groupes $H_i(Y, Z)$, $0 < i \leqq q - 1$. Il résulte de la formule précédente que, pour tout corps k, on a:

$$M \otimes k = \operatorname{Tor}(M, k) = 0.$$

Je dis que cette propriété entraîne $M = 0$.
En effet, prenons d'abord $k = Q$, corps des rationnels; $M \otimes Q = 0$ signifie que M est un groupe de torsion; prenons $k = F_p$, corps à p éléments; $\operatorname{Tor}(M, F_p) = 0$ signifie que la relation $p \cdot x = 0$, $x \in M$, entraîne $x = 0$. Ceci ayant lieu pour tout p, et M étant de torsion comme on vient de le voir, on a bien $M = 0$, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE. *Dans les conditions de la Prop. 4, supposons que B soit un polyèdre localement fini. Alors la fibration de $E = R^n$ est triviale, autrement dit, $E = B \times F$.*

Puisque B est un polyèdre localement fini simplement connexe et acyclique, il est contractile. Le corollaire résulte alors d'un théorème classique de Feldbau.

REMARQUES: 1. On peut montrer que la conclusion du corollaire précédent subsiste si l'on remplace l'hypothèse "B est un polyèdre localement fini" par la suivante: "F est un polyèdre localement fini". En fait, il paraît probable que l'on peut se passer complètement d'hypothèses restrictives sur B ou F; sans doute n'existe-t-il pas d'autres fibrations de R^n, à fibres connexes, que la décomposition en produit direct: $R^n = R^p \times R^q$ $(p + q = n)$, mais cela paraît difficile à établir.[3] 2. A. Shapiro, utilisant la théorie de Čech ainsi que des méthodes analogues à celles de G. Hirsch, a obtenu la Prop. 4 et a montré comment on pouvait en tirer le résultat suivant, conjecturé par Montgomery et Samelson: *R^n ne peut être fibré à fibres compactes non réduites à un point* [29]. En s'appuyant sur la théorie de Leray (en cohomologie à supports compacts), A. Borel et l'auteur [2] ont obtenu indépendamment le même résultat; leur méthode montre en outre qu'*il n'existe pas de fibration de R^n, à fibres connexes, et à base compacte non réduite à un point* [1].

4. Une suite exacte

PROPOSITION 5. *Soit A un anneau principal, et supposons que le système local formé par $H_i(F, A)$ soit trivial sur B pour tout $i \geqq 0$, que $H_i(B, A) = 0$ pour $0 < i < p$, et que $H_i(F, A) = 0$ pour $0 < i < q$. Dans ces conditions on a la suite exacte:*

$$H_{p+q-1}(F, A) \to H_{p+q-1}(E, A) \to H_{p+q-1}(B, A) \to H_{p+q-2}(F, A) \to \cdots$$
$$\cdots \to H_2(B, A) \to H_1(F, A) \to H_1(E, A) \to H_1(B, A) \to 0.$$

D'après la formule des coefficients universels, on a:

$$E_2^{i,j} = H_i(B, A) \otimes H_j(F, A) + \operatorname{Tor}(H_{i-1}(B, A), H_j(F, A)),$$

[3] Pour plus de détails sur cette question, voir l'article de G. S. Young (Proc. Amer. Math. Soc., *1*, 1950, p. 215–223): *On the factors and fiberings of manifolds.*

les opérations $\otimes$ et Tor étant prises par rapport à l'anneau principal A. Il suit de là que $E_2^{i,j} = 0$ si $i \neq 0, j \neq 0$ et $i + j \leqq p + q - 1$. Pour un degré total n donné, le terme E_2 ne contient donc que deux termes éventuellement non nuls: $E_2^{n,0} = H_n(B, A)$ et $E_2^{0,n} = H_n(F, A)$ (ceci pour $0 \leqq n \leqq p + q - 1$). En outre, les conditions du n° 4 du Chapitre I sont évidemment remplies, et on peut appliquer la proposition 3 de ce n°, qui donne le résultat cherché.

On notera que l'homomorphisme: $H_n(B, A) \to H_{n-1}(F, A)$ $(0 \leqq n \lneqq p + q - 1)$ n'est autre que la *transgression* d_n.

Remarques. 1. Une suite exacte duale existe en cohomologie (appliquer la Prop. 3′ du Chapitre I).

2. Les homomorphismes:

$$\pi_i(F) \to H_i(F, Z), \qquad \pi_i(E) \to H_i(E, Z), \qquad \pi_i(B) \to H_i(B, Z)$$

définissent un homomorphisme *compatible* de la suite exacte d'homotopie dans la suite exacte de la Prop. 5 (relative à $A = Z$, anneau des entiers); cela résulte immédiatement de la commutativité du diagramme (I′) du Chapitre II, n° 7.

Corollaire 1. *Dans les conditions de la proposition précédente, l'application canonique* p_*: $H_i(E \text{ mod.} F, A) \to H_i(B, A)$ *est une application sur pour* $2 \leqq i \leqq p + q$, *et un isomorphisme pour* $2 \leqq i \leqq p + q - 1$.

L'image de $H_i(E \text{ mod. } F, A) \to H_i(B, A)$ est $E_i^{i,0}$ (Chap. II, n° 7); or la différentielle d_r est nulle sur $E_r^{i,0}$ si $2 \leqq r < i \leqq p + q$, puisqu'elle applique ce module dans $E_r^{i-r,r-1}$ qui est nul. Il suit de là que:

$$H_i(B, A) = E_2^{i,0} = E_3^{i,0} = \cdots = E_i^{i,0}, \qquad (2 \leqq i \leqq p + q),$$

ce qui démontre la première partie du corollaire.
Pour démontrer la seconde, considérons le diagramme (où $2 \leqq i \leqq p + q - 1$):

$$\begin{array}{ccccccccc} H_i(F, A) & \to & H_i(E, A) & \to & H_i(E \text{ mod. } F, A) & \to & H_{i-1}(F, A) & \to & H_{i-1}(E, A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_i(F, A) & \to & H_i(E, A) & \to & H_i(B, A) & \to & H_{i-1}(F, A) & \longrightarrow & H_{i-1}(E, A) \end{array}$$

où les applications verticales sont les applications identiques, à l'exception de la troisième qui est p_*. Ce diagramme est commutatif (d'après le Chap. II, n° 7), et ses deux lignes sont des suites exactes. Il résulte alors du "lemme des cinq" que p_* est un isomorphisme sur, ce qui achève la démonstration du corollaire.

Corollaire 2. *Supposons que* $H_i(E, A) = 0$ *pour tout* $i > 0$, *et que* $H_i(B, A) = 0$ *pour* $0 < i < p$. *Alors la suspension* Σ *applique* $H_i(F, A)$ *sur* $H_{i+1}(B, A)$ *pour* $0 < i \leqq 2p - 2$, *et est un isomorphisme pour* $0 < i < 2p - 2$.
En particulier, $H_i(F, A) = 0$ *pour* $0 < i < p - 1$.

En appliquant la Prop. 5 avec $q = 1$, on trouve d'abord que $H_i(F, A) = 0$ pour $0 < i < p - 1$. L'application du corollaire précédent (avec $q = p - 1$) donne alors le résultat cherché, compte tenu du fait que $\Sigma = p_* \circ \partial^{-1}$, où ∂ désigne l'opérateur bord: $H_{i+1}(E \text{ mod. } F, A) \to H_i(F, A)$.

Corollaire 3. *Supposons que* $H_i(B, A) = 0$ *pour tout* $i > 0$. *Alors l'application canonique:* $H_i(F, A) \to H_i(E, A)$ *définit un isomorphisme du premier module sur le second pour tout* $i \geqq 0$.

On applique la Prop. 5 avec $p = \infty$, $q = 1$.

Corollaire 4. *Supposons que $H_i(F, A) = 0$ pour tout $i > 0$. Alors la projection p de E sur B définit un isomorphisme de $H_i(E, A)$ sur $H_i(B, A)$ pour tout $i \geqq 0$.*

On applique la Prop. 5 avec $p = 1$, $q = \infty$.

Remarque. Ce dernier résultat peut être considéré comme l'analogue, dans la théorie singulière, d'un théorème bien connu de Vietoris, valable pour l'homologie (ou la cohomologie) de Čech; ce théorème de Vietoris peut d'ailleurs être démontré, par la théorie de Leray, de la même façon que ci-dessus.[4]

5. Suite exacte de Gysin

Proposition 6. *Soit E un espace fibré de base B connexe par arcs et dont la fibre F a même cohomologie à coefficients dans A, anneau commutatif à élément unité, que la sphère S_k, $k \geqq 1$. Supposons que le système local formé par $H^k(F, A)$ sur B soit trivial. On a alors la suite exacte:*

$$\cdots \to H^i(B, A) \to H^i(E, A) \to H^{i-k}(B, A) \xrightarrow{h} H^{i+1}(B, A) \to \cdots$$

avec $h(x) = x \cdot \Omega = \Omega \cdot x$ pour tout $x \in H^{i-k}(B, A)$, Ω étant un élément bien déterminé de $H^{k+1}(B, A)$, tel que $2\Omega = 0$ si k est pair.

(Ce résultat est dû essentiellement à W. Gysin [16]; la forme sous laquelle nous le donnons est due à R. Thom [31] et S. S. Chern-E. Spanier [9]. La démonstration qui suit est celle de Leray [24], n° 11).

Considérons le terme E_2 de la suite spectrale de *cohomologie* de l'espace fibré E. On a:

$$E_2 = H^*(B, H^*(F, A)) = H^*(B, H^0(F, A)) + H^*(B, H^k(F, A)).$$

L'homomorphisme d'algèbres: $H^*(B, A) \otimes H^*(F, A) \to H^*(B, H^*(F, A))$ est donc un *isomorphisme sur* (le produit tensoriel étant pris *sur* A).

Il résulte d'abord de là que, pour un degré total i donné, le terme E_2 ne contient que deux termes éventuellement non nuls:

$$E_2^{i,0} = H^i(B, A) \text{ et } E_2^{i-k,k} = H^{i-k}(B, A) \otimes H^k(F, A).$$

Appliquant alors la Prop. 3′ du Chap. I, on obtient la suite exacte:

$$\cdots \to H^i(B, A) \to H^i(E, A) \to H^{i-k}(B, A) \otimes H^k(F, A) \xrightarrow{d_{k+1}} H^{i+1}(B, A) \to \cdots$$

Pour obtenir la suite exacte de l'énoncé, il n'y a plus qu'à choisir un isomorphisme $g: H^{i-k}(B, A) \to H^{i-k}(B, A) \otimes H^k(F, A)$, et à poser: $h = d_{k+1} \circ g$. Soit s un élément générateur de $H^k(F, A)$; nous poserons:

$$g(x) = (-1)^{\deg . x} x \otimes s \text{ pour tout } x \in H^*(B, A).$$

Posons alors $\Omega = d_{k+1}(1 \otimes s) \in H^{k+1}(B, A)$. On a:

$$h(x) = d_{k+1}((-1)^{\deg . x} x \otimes s) = (-1)^{\deg . x} d_{k+1}(x) \cdot s + (-1)^{2 \deg . x} x \cdot d_{k+1}(s).$$

[4] Voir A. Borel (J. Math. Pures Appl., *29*, 1950, p. 313–322): *Remarques sur l'homologie filtrée*, Th.5-a.

Puisque $d_{k+1}(x) = 0$, on en tire bien $h(x) = x\cdot\Omega$. Pour montrer que $h(x) = \Omega\cdot x$, il suffit de voir que $2\Omega = 0$ si k est pair (à cause de la loi d'anticommutation dans $H^*(B, A)$). Or, on a:

$$d_{k+1}(s^2) = 2s\cdot d_{k+1}(s) = 2\Omega \otimes s. \text{ Mais } s^2 = 0, \text{ d'où } 2\Omega = 0, \text{ cqfd.}$$

REMARQUES. 1. La suite exacte duale vaut en homologie, la démonstration est la même.

2. On trouvera dans la note de R. Thom [31] un résultat plus complet, en ce sens qu'il est valable même si le système local formé par $H^k(F, A)$ n'est pas trivial (espace fibré "non orientable"), et même si $k = 0$. On pourrait étendre notre méthode de façon à englober le cas "non orientable", mais par contre, le cas où $k = 0$ ne semble pas pouvoir être obtenu de cette manière.

6. Suite exacte de Wang

PROPOSITION 7. *Soit E un espace fibré de fibre F connexe par arcs, et dont la base B a même anneau de cohomologie à coefficients dans l'anneau principal A que la sphère $\mathbf{S}_k$, $k \geqq 2$; on suppose en outre que B est simplement connexe. Dans ces conditions, on a la suite exacte:*

$$\cdots \to H^i(E, A) \to H^i(F, A) \xrightarrow{\theta} H^{i-k+1}(F, A) \to H^{i+1}(E, A) \to \cdots$$

où l'homomorphisme θ est une dérivation si k est impair, une antidérivation si k est pair.

(Ce résultat est dû essentiellement à H. C. Wang [32]; le fait que θ soit une dérivation (resp. antidérivation) suivant la parité de k a été signalé par J. Leray [24]. La démonstration qui suit est celle de Leray).

Considérons l'anneau spectral de cohomologie de l'espace fibré E. En appliquant la Prop. 8 du Chap. II, on voit que son terme E_2 est isomorphe à $H^*(B, A) \otimes H^*(F, A) = H^*(\mathbf{S}_k, A) \otimes H^*(F, A)$. Il suit de là que E_2 ne contient, pour un degré total donné, que deux termes éventuellement non nuls, et, en appliquant la Prop. $3'$ du Chap. I, ou obtient la suite exacte:

$$\cdots \to H^i(E, A) \to H^i(F, A) \xrightarrow{d_k} H^k(B, A) \otimes H^{i-k+1}(F, A)$$
$$\to H^{i+1}(E, A) \to \cdots$$

Pour obtenir celle de l'énoncé, il n'y a plus qu'à choisir un isomorphisme $g:H^{i-k+1}(F, A) \to H^k(B, A) \otimes H^{i-k+1}(F, A)$, et à poser:

$$\theta = g^{-1} \circ d_k .$$

Soit s un élément générateur de $H^k(B, A)$; nous poserons $g(x) = s \otimes x$.
On a donc par définition: $d_k(x) = s \otimes \theta(x)$, $x \in H^*(F, A)$.
Calculons alors $d_k(xy)$:
D'une part: $d_k(xy) = s \otimes \theta(xy)$,

et d'autre part:

$$\begin{aligned} d_k(xy) &= d_k(x) \cdot y + (-1)^{\deg . x} x \cdot d_k(y) \\ &= (s \otimes \theta(x)) \cdot y + (-1)^{\deg . x} x \cdot (s \otimes \theta(y)) \\ &= s \otimes (\theta(x) \cdot y) + (-1)^{(k+1)\deg . x} s \otimes (x \cdot \theta(y)). \end{aligned}$$

En comparant, on obtient:

$$\theta(xy) = \theta(x) \cdot y + (-1)^{(k+1)\deg . x} x \cdot \theta(y),$$

ce qui signifie bien que θ est une dérivation si k est impair, et une antidérivation si k est pair.

Remarque. En homologie, on a la suite exacte duale:

$$\cdots \leftarrow H_i(E, A) \leftarrow H_i(F, A) \leftarrow H_{i-k+1}(F, A) \leftarrow H_{i+1}(E, A) \leftarrow \cdots$$

7. Un théorème de Leray-Hirsch

Soit E un espace, F un sous-espace de E, k un corps commutatif. Les conditions: "$H_i(F, k) \to H_i(E, k)$ est biunivoque" et: "$H^i(E, k) \to H^i(F, k)$ est sur" sont équivalentes, comme il résulte tout de suite de la dualité entre homologie et cohomologie. Si ces conditions sont remplies pour tout $i \geqq 0$, on dit que F est "*totalement non homologue à zéro*" dans E (relativement au corps k).

Cette définition étant posée, on a:

Proposition 8. *Soit E un espace fibré de fibre F et de base B, F et B étant connexes par arcs. Soit k un corps commutatif et supposons:*

(a) *que F soit totalement non homologue à zéro dans E relativement à k,*

(b) *que $H^i(F, k)$ ou bien $H^i(B, k)$ soit de dimension finie sur k pour tout $i \geqq 0$. Dans ces conditions l'algèbre graduée associée à $H^*(E, k)$ est isomorphe à $H^*(B, k) \otimes H^*(F, k)$.* (*Voir* [24], th.7.3)

Il résulte tout d'abord de (a) que le système local formé par $H^i(F, k)$ sur B est trivial pour tout $i \geqq 0$. En effet, on sait (Chap. II n° 9, $a-$) que l'image de $H^*(E, k)$ dans $H^*(F, k)$ par la transposée de l'injection $F \to E$ est formée d'éléments qui sont invariants par les transformations T_α, $\alpha \in \pi_1(B)$; l'hypothèse (a) entraîne donc que *tous* les éléments de $H^i(F, k)$ sont invariants par $\pi_1(B)$, ce qui signifie que le système local est trivial.

Cela étant, il résulte de (b) et de la Prop. 8 du Chap. II que le terme E_2 de la suite spectrale de cohomologie de E est isomorphe (en tant qu'algèbre) au produit tensoriel gauche (sur k) $H^*(B, k) \otimes H^*(F, k)$. Comme l'image de $H^*(E, k)$ dans $H^*(F, k)$ est formée des éléments de $H^*(F, k)$ qui sont des cocycles pour toutes les différentielles d_r, l'hypothèse (a) revient à dire que $d_r = 0$ sur $H^*(F, k)$ pour tout r. Mais comme d_r est nulle sur les éléments de $H^*(B, k)$ et que c'est une *antidérivation*, elle est nulle sur tout $H^*(B, k) \otimes H^*(F, k)$, et l'on a $E_2 = E_3 = \cdots = E_\infty$, cqfd.

En général, l'algèbre $H^*(E, k)$ n'est pas isomorphe à l'algèbre $H^*(B,k) \otimes H^*(F, k)$. On a en effet:

Proposition 9. *Les hypothèses étant celles de la Prop. 8, pour qu'il existe un isomorphisme d'algèbres:* $H^*(B, k) \otimes H^*(F, k) \to H^*(E, k)$ *qui, par passage aux algèbres graduées associées, donne l'isomorphisme de* E_2 *sur* E_∞, *il faut et il suffit qu'il existe un homomorphisme d'algèbre* q^*: $H^*(F, k) \to H^*(E, k)$ *qui, composé avec l'homomorphisme canonique* $i^*: H^*(E, k) \to H^*(F, k)$, *donne l'automorphisme identique de* $H^*(F, k)$.

La nécessité est évidente.

Pour voir la suffisance, considérons l'application $p^*: H^*(B, k) \to H^*(E, k)$, transposée de la projection $p: E \to B$. Ceci permet de définir l'homomorphisme d'*algèbres*

$$p^* \otimes q^*: H^*(B, k) \otimes H^*(F, k) \to H^*(E, k).$$

En outre, si nous filtrons $H^*(E, k)$ par les $D^{p,q}$, et $H^*(B, k) \otimes H^*(F, k)$ par le degré-base, l'homomorphisme $p^* \otimes q^*$ est compatible avec ces filtrations de façon évidente. On peut donc définir l'homomorphisme correspondant $\overline{p^* \otimes q^*}$ des algèbres graduées associées, qui applique $H^*(B,k) \otimes H^*(F,k)$ dans $H^*(B, k) \otimes H^*(F, k)$. D'après les propriétés de p^* (resp. q^*), cet homomorphisme est l'identité sur $H^*(B, k)$ (resp. $H^*(F, k)$), et, comme c'est un homomorphisme d'algèbres, c'est l'identité partout. Nous avons donc démontré que $\overline{p^* \otimes q^*}$ est un isomorphisme sur. On en tire par un raisonnement classique (*Voir*, par exemple, [23], Prop. 6.2) que $p^* \otimes q^*$ est lui-même un isomorphisme sur, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 1. *Les hypothèses étant celles de la Prop. 8, supposons que* $H^*(F, k)$ *soit engendré par des éléments homogènes* f_α *de degré* n_α, *vérifiant les seules relations:*

$$f_\alpha f_\beta = (-1)^{n_\alpha n_\beta} f^\beta f_\alpha .$$

Alors $H^*(E, k)$ *est isomorphe à* $H^*(B, k) \otimes H^*(F, k)$.

Il nous suffit de construire une application q^* vérifiant les conditions de la Prop. 9; pour cela, soient $c_\alpha \in H^*(E, k)$ des éléments tels que $i^*(c_\alpha) = f_\alpha$. L'application: $f_\alpha \to c_\alpha$ se prolonge d'une façon et d'une seule en un homomorphisme d'algèbres $q^*: H^*(F, k) \to H^*(E, k)$ qui vérifie visiblement les conditions prescrites.

Remarque. On retrouve ainsi un théorème classique de Samelson, sur les sous-groupes non homologues à zéro d'un groupe de Lie. Toutefois, comme nous n'avons pas supposé que les n_α soient impairs, notre résultat est également applicable au cas où F est un espace de lacets (Cf. Chapitre IV).

Corollaire 2. *Soient* B *et* F *deux espaces connexes par arcs, et supposons que* $H^i(B, k)$ *ou* $H^i(F, k)$ *soit de dimension finie pour tout* $i \geqq 0$. *Désignons par* p *et* q *les projections canoniques de* $E = B \times F$ *sur* B *et* F *respectivement, par* p^* *et* q^* *les homomorphismes de* $H^*(B, k)$ *et de* $H^*(F, k)$ *dans* $H^*(E, k)$ *qu'elles définissent. Dans ces conditions, l'homomorphisme* $p^* \otimes q^*$ *est un isomorphisme de* $H^*(B, k) \otimes H^*(F, k)$ *sur* $H^*(E, k)$.

On applique la Prop. 9 à E, considéré comme espace fibré de base B et de fibre F.

Remarque. Si l'on supprime l'hypothèse de finitude de l'énoncé précédent, on peut simplement montrer que $H^*(E, k) = \mathrm{Hom}(H(B, k), H^*(F, k))$, ce qui est d'ailleurs un cas particulier d'un théorème général d'Eilenberg-Zilber (non-publié)—Les autres résultats de ce n° sont susceptibles d'une extension analogue.

Chapitre IV. Les espaces de lacets

1. Les espaces de lacets

Soit X un espace topologique (non nécessairement séparé), et désignons par I le segment $[0, 1]$. Nous dirons qu'une application continue $f:I \to X$ est un *lacet* au point $x \in X$, si $f(0) = f(1) = x$. Nous munirons l'ensemble Ω_x des lacets au point x d'une topologie: celle de la *convergence compacte* (compact-open topology, dans la terminologie américaine). Cette topologie est étudiée, par exemple, dans Bourbaki, Top. X, §2, en supposant que l'espace dans lequel les fonctions prennent leurs valeurs (ici X) est séparé. Mais en réalité, presque toutes les propriétés démontrées par Bourbaki sont indépendantes de cette hypothèse. En particulier, on a le résultat suivant:

Soit g une application d'un espace topologique Y dans Ω_x ; g définit une application $G:I \times Y \to X$ par la formule: $G(t, y) = g(y)(t)$. Alors, pour que g soit continue (Ω_x étant muni de la topologie de la convergence compacte), il faut et il suffit que G le soit.

Loi de composition sur l'espace des lacets.

Cette loi fait correspondre à deux lacets f, $g \in \Omega_x$ un troisième lacet, noté $f*g$, et défini par:

$$(f*g)(t) = \begin{cases} g(2t) & \text{si } t \leqq \frac{1}{2} \\ f(2t - 1) & \text{si } t \geqq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Nous désignerons par e_x (ou e lorsqu'aucune confusion ne sera à craindre) le lacet réduit au point $x : e_x(t) = x$ pour tout $t \in I$.

On sait que la loi de composition précédente n'est pas associative, et n'a pas d'élément neutre, mais vérifie toutefois ces propriétés "à une homotopie près". Pour préciser ceci, introduisons la notion suivante:

Définition. *Soit G un espace topologique, muni d'une loi de composition notée $\vee$. Le couple $(G, \vee)$ est dit un H-espace si les conditions suivantes sont réalisées:*

(I) *L'application $(x, y) \to x \vee y$ est une application continue de $G \times G$ dans G.*

(II) *Il existe $e \in G$, avec $e \vee e = e$, tel que les applications: $x \to x \vee e$ et $x \to e \vee x$ soient homotopes à l'identité dans G* (par des homotopies laissant le point e fixe).

Par exemple, tout groupe topologique est un H-espace.

Proposition 1. *Soit X un espace topologique, x un point de X. L'espace des lacets au point x, Ω_x, muni de la topologie de la convergence compacte et de la loi de composition $*$ est un H-espace.*

Pour vérifier (I), il suffit de montrer que l'application de $\Omega_x \times \Omega_x \times I$ dans X définie par:

$$(f, g, t) \to \begin{cases} g(2t) & \text{si } t \leqq \frac{1}{2} \\ f(2t - 1) & \text{si } t \geqq \frac{1}{2} \end{cases}$$

est continue. Or cela résulte immédiatement des continuités des applications: $(g, t) \to g(2t)$ $(t \leqq \frac{1}{2})$ et $(f, t) \to f(2t - 1)$ $(t \geqq \frac{1}{2})$.

Pour vérifier (II) on prend pour e le lacet réduit au point x. Il est clair que $e{*}e = e$.

D'autre part, soit $f \in \Omega_x$, et définissons la famille de lacets f_θ, $0 \leqq \theta \leqq 1$, par les formules:

$$f_\theta(t) = x \text{ si } t \leqq \theta/2$$

$$f_\theta(t) = f((2t - \theta)/(2 - \theta)) \text{ si } t \geqq \theta/2.$$

On a $f_\theta(1) = f_\theta(0) = x$ pour tout θ; donc f_θ est bien un lacet. D'autre part, $f_0(t) = f(t)$, $f_1 = f{*}e$, et, si $f = e$, $f_\theta = e$ pour tout θ. On aura donc bien montré que $f \to f{*}e$ est homotope à l'identité, dans une homotopie laissant fixe le lacet e, si on sait que l'application $(f, \theta) \to f_\theta$ est une application continue de $\Omega_x \times I$ dans Ω_x. En d'autres termes, il faut vérifier que l'application $\varphi:\Omega_x \times I \times I \to X$, définie par $\varphi(f, \theta, t) = f_\theta(t)$ est continue.

Or, soit $Q:I \times I \to I$ l'application définie par:

$$Q(\theta, t) \begin{cases} = 0 & \text{si } t \leqq \theta/2 \\ = (2t - \theta)/(2 - \theta) & \text{si } t \geqq \theta/2. \end{cases}$$

Il est évident que Q est continue. Désignons alors par $(1, Q)$ l'application de $\Omega_x \times I \times I$ dans $\Omega_x \times I$, produit direct de Q et de l'application identique de Ω_x sur lui-même; désignons par F l'application canonique: $\Omega_x \times I \to X$, définie par $F(f, t) = f(t)$. L'application F est continue, par définition même de la topologie de la convergence compacte.

Comme $\varphi = F \circ (1, Q)$, φ est donc bien continue, ce qui achève de montrer que $f \to f{*}e$ est homotope à l'identité. Une démonstration tout à fait analogue peut être faite pour $f \to e{*}f$.

2. Le théorème de Hopf

Dans ce paragraphe et le suivant nous donnerons quelques propriétés des H-espaces qui sont bien connues dans le cas des groupes topologiques, mais que nous appliquerons aux espaces de lacets.

Occupons-nous d'abord du théorème de Hopf.

Soit A une algèbre graduée, vérifiant la loi d'anticommutation habituelle: $xy = (-1)^{pq}yx$, si x et y sont homogènes et de degrés p et q respectivement. On supposera en outre que les éléments de degré 0 de A sont les multiples scalaires d'un élément unité, noté 1. Une telle algèbre (sur un corps de base de caractéristique quelconque) sera dite canonique.

Si A et B sont deux algèbres canoniques, $A \otimes B$, muni de la structure de produit tensoriel gauche, est une algèbre canonique. Dans cette algèbre, nous désignerons par N_A (resp. N_B) l'idéal engendré par les éléments de la forme $a \otimes 1$ (resp. $1 \otimes b$) où $a \in A$ est de degré strictement positif (resp. $b \in B$ est de degré strictement positif). L'algèbre quotient $(A \otimes B)/N_A$ est isomorphe à B, comme on le voit immédiatement; de même, $(A \otimes B)/N_B$ est isomorphe à A. En particulier si $A = B$, on obtient ainsi deux homomorphismes de $A \otimes A$ sur A, que nous désignerons respectivement par p et q; on peut donc écrire:

$$x = q(x) \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes p(x) \qquad (x \in A \otimes A),$$

les termes non écrits étant des produits tensoriels de deux éléments de A de degrés strictement positifs.

Un homomorphisme d'*algèbre* $r:A \to A \otimes A$ est dit un *H-homomorphisme* si les composés $p \circ r$ et $q \circ r$ sont des *automorphismes* de A. *L'existence d'un H-homomorphisme* permet d'appliquer à l'algèbre A les raisonnements classiques de Hopf. Nous ne les répèterons pas, renvoyant à l'exposé qu'en donne Leray ([21], n° 24). Rappelons seulement le résultat auquel on arrive:

THÉORÈME DE HOPF. *Soit B un système minimal de générateurs homogènes de A, et $S(B)$ l'algèbre engendrée par les éléments de B soumis aux seules relations d'anticommutation. Les éléments de $S(B)$ peuvent être appelés polynomes anti-commutatifs en les éléments de B; on peut parler de la dérivée d'un tel polynome par rapport à un $b \in B$. L'algèbre A est isomorphe au quotient de $S(B)$ par un idéal homogène N jouissant de la propriété suivante*:

Soit $P \in N$, et soit b un élément de B de degré maximum parmi tous ceux qui figurent dans P; alors $P'_b \in N$.

Si le corps de base est de caractéristique nulle, ceci entraîne que $N = 0$, et par suite $A = S(B)$. En groupant alors les éléments de B de degré pair, et ceux de degré impair, on voit que: *A est isomorphe au produit tensoriel d'une algèbre extérieure engendrée par des éléments de degré impair, et d'une algèbre de polynomes engendrée par des éléments de degré pair.*

La proposition suivante permettra d'appliquer ces résultats aux H-espaces (et en particulier aux espaces de lacets):

PROPOSITION 2. *Soit G un H-espace connexe par arcs, k un corps commutatif. Supposons que $H^i(G, k)$ soit de dimension finie sur k pour tout $i \geqq 0$. Alors l'algèbre $H^*(G, k)$, algèbre de cohomologie de G à coefficients dans k, possède un H-homomorphisme.*

Soit $A = H^*(G, k)$; puisque G est connexe par arcs, A est une algèbre canonique. En outre, d'après le Cor. 2 à la Prop. 9 du Chapitre III, $H^*(G \times G, k) = A \otimes A$. Si $y \in G$ est un point quelconque de G, l'application $P:G \to G \times G$ définie par $P(x) = (y, x)$ induit un homomorphisme de $H^*(G \times G, k) = A \otimes A$ dans $H^*(G, k) = A$ *qui n'est autre que p*. De même, $Q(x) = (x, y)$ induit q.

Utilisons maintenant la loi de multiplication de G, et définissons l'application continue $R:G \times G \to G$ par $R(x, y) = x \vee y$. Cette application induit un homomorphisme $r:A \to A \otimes A$, et *je dis que r est un H-homomorphisme*, ce qui démontrera la proposition.

En effet, considérons l'homomorphisme $q \circ r$. Il est défini par l'application continue $R \circ Q:G \to G$. Mais pour définir Q, nous pouvons prendre un point y arbitraire de G: choisissons $y = e$. On a alors:

$$R \circ Q(x) = x \vee e.$$

Puisque l'application $x \to x \vee e$ est homotope à l'identité, il en résulte que $q \circ r = 1$; on montre de même que $p \circ r = 1$, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE. *Ajoutons aux hypothèses de la Prop. 2 celle que le corps k est de caractéristique nulle. Alors l'algèbre $H^*(G, k)$ est isomorphe à $S(x_k) \otimes A(y_l)$, où $S(x_k)$ désigne une algèbre de polynomes engendrée par des éléments x_k de degré pair n_k, et $A(y_l)$ une algèbre extérieure engendrée par des éléments y_l de degré impair m_l. En outre, il n'y a qu'un nombre fini de x_k et de y_l dont le degré soit plus petit qu'un entier donné.*

Il nous reste simplement à prouver la dernière assertion; elle résulte évidemment du fait que $H^i(G, k)$ est de dimension finie pour tout $i \geqq 0$.

REMARQUE. Si G est un groupe de Lie, son algèbre de cohomologie est nulle pour les dimensions assez grandes, et ne peut contenir une algèbre de polynomes. C'est donc une algèbre extérieure (si le corps k est de caractéristique nulle), conformément au Th. de Hopf classique.

Par contre, si G est un espace de lacets, il n'y a plus de raison pour qu'il en soit ainsi, bien au contraire (*Voir* en effet Prop. 11). Par exemple, on verra au n° 9 que, si G est l'espace des lacets sur la sphère $\mathbf{S}_n$ (n impair), $H^*(G) = S(x)$ où x est de degré $n - 1$, et si n est pair, $H^*(G) = S(x) \otimes A(y)$, où x est de degré $2n - 2$ et y de degré $n - 1$.

3. Simplicité des H-espaces

Soit G un groupe de Lie connexe, T son revêtement universel; on sait que T peut être muni d'une structure de groupe de Lie telle que la projection $p:T \to G$ soit un homomorphisme; le noyau de p est un sous-groupe discret du centre de T, isomorphe à $\pi_1(G)$. Les automorphismes de T définis par les éléments de $\pi_1(G)$ sont simplement les translations par les éléments de ce sous-groupe discret. Comme toute translation est homotope à l'identité (G étant connexe), on voit que *les automorphismes définis par les éléments de $\pi_1(G)$ sur T sont homotopes à l'identité.*

Nous allons montrer maintenant que cette démonstration peut s'étendre, en la compliquant légèrement, aux H-espaces quelconques. Le résultat ainsi obtenu sera utilisé de façon essentielle au Chapitre suivant (dans le cas particulier où G est un espace de lacets).

Soit donc G un H-espace dont la loi de multiplication est notée $x \vee y$; on supposera G connexe par arcs, localement connexe par arcs et localement simplement connexe; on définit son revêtement universel T comme il a été dit au Chap. I, n° 6 (en choisissant comme point de base l'idempotent e introduit dans la condition (II) des H-espaces). D'autre part, soit E l'espace des chemins issus de e dans G, E étant muni de la topologie de la convergence compacte. Si on fait correspondre à un chemin $q \in E$ sa classe d'homotopie, on définit une application

$\sigma : E \to T$. Cette application permet d'identifier T à un *espace quotient* de E (parce que G est localement simplement connexe).

On peut munir E d'une loi de composition, notée encore $\vee$, définie par la formule: $(f \vee g)(t) = f(t) \vee g(t)$ $t \in I, f, g \in E$. Ceci est licite car $e \vee e = e$.

On voit immédiatement que l'application $(f, g) \to f \vee g$ est une application continue de $E \times E$ dans E, et que, si f' est homotope à f, et g' homotope à g, alors $f' \vee g'$ est homotope à $f \vee g$. Ceci permet de définir la loi de composition $\vee$ sur T, par passage au quotient.

Soit maintenant u un lacet sur G. Nous allons définir une déformation de E qui relie l'application identique $f \to f$ à l'application $f \to u * f$ ($u * f$ désigne ici le composé des deux chemins u et f, composé qui est défini par les formules du nº 1). En outre cette déformation devra être telle qu'elle puisse passer au quotient et définir une déformation de T.

Commençons par donner un nom aux déformations de G qui relient l'application $x \to x$ aux applications $x \to x \vee e$ et $x \to e \vee x$: Soit $F_\theta(x)$, fonction continue de $\theta \in I$ et de $x \in G$, telle que:

$$F_0(x) = x, \qquad F_1(x) = x \vee e \quad \text{pour tout} \quad x \in G, \qquad \text{et} \quad F_\theta(e) = e, \quad \theta \in I.$$

Soit $G_\theta(x)$, fonction continue de $\theta \in I$ et de $x \in G$, telle que:

$$G_0(x) = x, \qquad G_1(x) = e \vee x \quad \text{pour tout} \quad x \in G, \qquad \text{et} \quad G_\theta(e) = e, \quad \theta \in I.$$

Considérons alors les quatre déformations suivantes qui font correspondre à un élément $f \in E$ une famille f_θ d'éléments de E ($\theta \in I$):

1º *déf.*: $f_\theta(t) = G_\theta(f(t))$ fait passer de f à $e \vee f$.

2º *déf.*: $f_\theta(t) = u(\theta t) \vee f(t)$ fait passer de $e \vee f$ à $u \vee f$.

3º *déf.*:
$$\begin{aligned} f_\theta(t) &= u(2t) \vee e && \text{si} \quad t \leqq \theta/2 \\ &= u(\theta) \vee f(2t - \theta) && \text{si} \quad \theta/2 \leqq t \leqq \theta \\ &= u(t) \vee f(t) && \text{si} \quad t \geqq \theta. \end{aligned}$$
fait passer de $u \vee f$ à $V(f)$.

4º *déf.*:
$$\begin{aligned} f_\theta(t) &= F_{1-\theta}(u(2t)) && \text{si} \quad t \leqq 1/2 \\ &= G_{1-\theta}(f(2t - 1)) && \text{si} \quad t \geqq 1/2 \end{aligned}$$
fait passer de $V(f)$ à $u * f$.

(On a désigné par $V(f)$ le chemin suivant:

$$V(f)(t) = u(2t) \vee e \quad \text{si} \quad t \leqq 1/2$$
$$V(f)(t) = e \vee f(2t - 1) \quad \text{si} \quad t \geqq 1/2).$$

Il ne nous reste plus maintenant qu'un certain nombre de vérifications à faire:

a—*Les chemins $f_\theta(t)$ commencent au point e.*

1º cas—$f_\theta(0) = G_\theta(f(0)) = G_\theta(e) = e$.

2º cas—$f_\theta(0) = u(0) \vee f(0) = e \vee e = e$.

3° cas—$f_\theta(0) = u(0) \vee e = e \vee e = e$.

4° cas—$f_\theta(0) = F_{1-\theta}(u(0)) = F_{1-\theta}(e) = e$.

b—*Continuité des applications:* $(f, \theta) \to f_\theta$ *de* $E \times I$ *dans* E.

On se ramène à vérifier la continuité d'applications de $E \times I \times I$ dans G, ce qui ne présente pas de difficultés.

c—*L'extrémité de* f_θ *ne dépend que de l'extrémité de* f, *et du lacet* u *choisi.*

1° cas—$f_\theta(1) = G_\theta(f(1))$.

2° cas—$f_\theta(1) = u(\theta) \vee f(1)$.

3° cas—$f_\theta(1) = u(1) \vee f(1) = e \vee f(1)$.

4° cas—$f_\theta(1) = G_{1-\theta}(f(1))$.

Ces trois vérifications permettent de définir les f_θ sur T, par passage au quotient; l'on obtient ainsi une déformation de T qui relie l'automorphisme $f \to u * f$ à l'identité. Autrement dit:

PROPOSITION 3. *Soit G un H-espace connexe par arcs, localement connexe par arcs et localement simplement connexe. Les éléments de $\pi_1(G)$ définissent des automorphismes du revêtement universel T de G qui sont homotopes à l'identité.*

COROLLAIRE. *$\pi_1(G)$ opère trivialement sur les groupes d'homologie, de cohomologie et d'homotopie de T.*

En particulier, on voit que G est *simple en toute dimension*, ce qu'il est d'ailleurs facile de vérifier directement.

4. Fibrations des espaces de chemins

Soit X un espace connexe par arcs, A et B deux parties de X. Nous désignerons par $E_{A,B}$ l'espace des *chemins tracés dans X dont l'origine appartient à A et l'extrémité à B.* Autrement dit, $E_{A,B}$ est l'ensemble des applications continues $f: I \to X$, telles que $f(0) \in A$ et $f(1) \in B$. On munira $E_{A,B}$ de la *topologie de la convergence compacte*. On observera que $E_{A,B}$ et $E_{B,A}$ sont homéomorphes.

Si A se réduit au point x, on écrira simplement $E_{x,B}$ au lieu de $E_{\{x\},B}$. Définitions analogues pour $E_{A,x}$ et $E_{x,y}(x, y \in X)$. On observera que $E_{x,x}$ n'est autre que l'espace Ω_x des *lacets* au point x, introduit au n° 1.

Définissons une application $p_{A,B}: E_{A,B} \to A \times B$ par la formule:

$$p_{A,B}(f) = (f(0), f(1)) \quad \text{si } f \in E_{A,B}.$$

Cette application est continue et applique $E_{A,B}$ *sur* $A \times B$ puisque X est connexe par arcs.

PROPOSITION 4. *Le triple $(E_{A,B}, p_{A,B}, A \times B)$ est un espace fibré au sens du Chapitre II (c'est à dire vérifie le théorème de relèvement des homotopies pour les polyèdres).*

(En fait, nous allons voir qu'il vérifie le théorème de relèvement des homotopies pour *tous* les espaces).

Soit P un espace topologique, (f, f') une application continue de $I \times P$ dans $A \times B$; soit d'autre part une application continue $g:P \to E_{A,B}$, telle que $p_{A,B} \circ g(y) = (f(0, y), f'(0, y))$ pour tout $y \in P$. La donnée de g est équivalente à la donnée d'une application $G:I \times P \to X$, telle que $G(0, y) = f(0, y)$ et $G(1, y) = f'(0, y)$ pour $y \in P$.

Nous devons trouver une application continue $h:I \times P \to E_{A,B}$, telle que $h(0, y) = g(y)$ et $p_{A,B} \circ h = (f, f')$. Cela revient à chercher une application continue $H:I \times I \times P \to X$ telle que: $H(0, t, y) = G(t, y)$, $H(t, 0, y) = f(t, y)$, $H(t, 1, y) = f'(t, y)$. Si l'on désigne alors par R la partie suivante de $I \times I \times P$:

$$R = (\{0\} \times I \times P) \cup (I \times \{0\} \times P) \cup (I \times \{1\} \times P),$$

on voit qu'il s'agit de *prolonger à* $I \times I \times P$ *une application continue connue sur* R. Or ceci est évidemment possible puisque $(\{0\} \times I) \cup (I \times \{0\}) \cup (I \times \{1\})$ est un *rétracte* de $I \times I$. Ceci termine la démonstration.

PROPOSITION 5. *Si A est déformable en un point $x \in X$, l'espace $E_{A,B}$ est de même type d'homotopie que $A \times E_{x,B}$.*

(*Comparer* avec [27], *22*, n° 8).

L'hypothèse signifie qu'il existe une application continue $D:A \times I \to X$, telle que $D(a, 0) = a$ et $D(a, 1) = x$ pour tout $a \in A$. Nous noterons f_a l'application: $t \to D(a, t)$, f_a^{-1} l'application: $t \to D(a, 1 - t)$.

Soit φ l'application de $A \times E_{x,B}$ dans $E_{A,B}$ qui fait correspondre au couple (a, f) le chemin $g = f * f_a$ $(a \in A, f \in E_{x,B})$.

Soit ψ l'application de $E_{A,B}$ dans $A \times E_{x,B}$ qui fait correspondre au chemin g le couple $(a, g * f_a^{-1})$, où $a = g(0) \in A$.

On a donc:

$$(\varphi \circ \psi)(g) = g * f_a^{-1} * f_a \qquad \text{si} \quad g \in E_{A,B},$$

$$(\psi \circ \varphi)(a, f) = (a, f * f_a * f_a^{-1}) \quad \text{si} \quad a \in A \quad \text{et} \quad f \in E_{x,B}.$$

Pour tout $y \in X$, soit e_y le chemin réduit au point y. Pour montrer que $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$ sont homotopes à l'identité, on commence par déformer $f_a^{-1} * f_a$ en e_a et $f_a * f_a^{-1}$ en e_x. Il en résulte que les applications $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$ sont respectivement homotopes à:

$$g \to g * e_a \text{ (avec } a = g(0)) \quad \text{et} \quad (a, f) \to (a, f * e_x).$$

Ces applications étant visiblement homotopes à l'identité, la proposition est donc démontrée.

COROLLAIRE 1. *Si A et B sont déformables en des points x et y, $E_{A,B}$ est de même type d'homotopie que $A \times B \times E_{x,y}$.*

COROLLAIRE 2. *Si x, y, z, t sont des points quelconques de X, $E_{x,y}$ et $E_{z,t}$ sont de même type d'homotopie.*

En effet, puisque X est connexe par arcs, z et t sont déformables en x et y, et on peut appliquer le Corollaire 1.

Le Cor. 2 a pour conséquence que les groupes d'homologie, d'homotopie, des divers espaces $E_{x,y}$ sont isomorphes. En particulier, ils sont isomorphes aux groupes correspondants de l'espace des lacets sur X en un point quelconque de

X. Nous désignerons cet espace par Ω. On notera que Ω est connexe par arcs si et seulement si X est simplement connexe.

Appliquons alors les résultats du Chapitre II à la fibration de la Proposition 4. On obtient ainsi:

PROPOSITION 6. *Soit X un espace connexe par arcs et simplement connexe, Ω l'espace des lacets sur X, A et B deux parties de X, $E_{A,B}$ l'espace des chemins de X dont l'origine appartient à A et l'extrémité appartient à B. Il existe une suite spectrale d'homologie, telle que $E_2^{p,q} = H_p(A \times B, H_q(\Omega))$, dont le groupe terminal E_∞ est isomorphe au groupe gradué associé à $H(E_{A,B})$ convenablement filtré.*

(Bien entendu, une suite spectrale duale existe en cohomologie).

5. L'espace fibré des chemins d'origine fixée

Dans ce numéro, nous allons nous occuper plus particulièrement de l'espace fibré $E_{x,X}$ des chemins d'origine un point fixé $x \in X$ dont l'extrémité est un point quelconque y de X. D'après la Prop. 4 la *base* de cet espace fibré est X, et la *fibre* est Ω, espace des lacets en x.

PROPOSITION 7. *L'espace $E_{x,X}$ est contractile.*

Pour tout couple $(\theta, f) \in I \times E_{x,X}$, posons: $f_\theta(t) = f(\theta t)$. Il est clair que, pour tout θ, f_θ est un chemin de X dont l'origine est x; en outre l'application $(\theta, f) \to f_\theta$ est visiblement continue. Comme $f_0(t) = x$ pour tout $t \in I$, et que $f_1(t) = f(t)$ pour tout $t \in I$, la Proposition est démontrée.

Le même raisonnement donne le résultat plus général suivant:

PROPOSITION 7'. *Pour toute partie A de X, A est un rétracte de déformation de $E_{A,X}$.*

Rôle de l'espace $E_{x,X}$.

Il nous permet de considérer Ω comme *la fibre d'un espace d'homologie triviale dont la base est X*. En appliquant la suite spectrale à cette fibration, on obtiendra (dans une certaine mesure) les groupes d'homologie de Ω à partir de ceux de X.

Une telle situation se rencontre également dans la théorie des espaces fibrés principaux "universels" pour un groupe de Lie. Rappelons qu'un espace fibré principal sur le groupe de Lie G est dit universel (pour une certaine dimension) si tous ses groupes d'homologie sont nuls (jusqu'à cette dimension). De tels espaces existent pour tout groupe de Lie et toute dimension, et leur étude est un préliminaire indispensable à celle des autres espaces fibrés principaux (Cf. [5], ainsi qu'un mémoire de A. Borel en cours de préparation).

On notera toutefois qu'ici, c'est la *base* de l'espace universel que l'on "connait" et c'est la fibre que l'on cherche; dans la théorie habituelle des espaces universels sur un groupe de Lie, on se trouve plutôt dans la position inverse.

La suspension dans l'espace $E_{x,X}$.

Puisque $E_{x,X}$ est contractile, on a $H_i(E_{x,X}) = 0$ pour tout $i > 0$ et tout groupe de coefficients, et la suspension $\Sigma: H_i(\Omega) \to H_{i+1}(X)$ est définie pour tout $i > 0$. Rappelons que:

$$\Sigma = p_* \circ \partial^{-1}$$

où p_* désigne la projection canonique: $H_{i+1}(E_{x,X} \text{ mod. } \Omega) \to H_{i+1}(X)$ et ∂ l'opérateur bord: $H_{i+1}(E_{x,X} \text{ mod. } \Omega) \to H_i(\Omega)$.

Nous allons en donner une définition plus précise.

Pour cela, soient $C(E)$ et $C(X)$ les complexes singuliers cubiques de $E_{x,X}$ et X respectivement. Comme $E_{x,X}$ est contractile, il existe un opérateur k, défini dans $C(E)$, élevant le degré d'une unité, et tel que:

$$kdx + dkx = x \qquad \text{pour tout } x \text{ de dimension} > 0.$$

Soit s l'opérateur $p \circ k$, qui applique $C(\Omega)$ complexe singulier de Ω, dans $C(X)$. L'opérateur s élève le degré d'une unité et l'on a: $dsx + sdx = dpkx + pkdx = p(dkx + kdx) = px = 0$, si x est de degré strictement positif (on a $px = 0$, à cause de l'identification à 0 des cubes dégénérés).

On voit donc que s *anticommute avec le bord* et définit un homomorphisme de $H_i(\Omega)$ dans $H_{i+1}(X)$ $(i > 0)$ qui n'est autre que la suspension, d'après la définition même de cette dernière.

Explicitons maintenant l'opérateur k:

Soit $y(t_1, \cdots, t_n)$ un cube singulier de dimension n à valeurs dans l'espace $E_{x,X}$. Nous définissons le cube ky par la formule:

$$(ky(t_1, \cdots, t_{n+1}))(t) = (y(t_2, \cdots, t_{n+1}))(tt_1).$$

On vérifie sans peine la formule $dk + kd = 1$; ceci étant, pour obtenir l'homomorphisme s, il suffit de faire $t = 1$ dans la formule précédente:

$$sy(t_1, \cdots, t_{n+1}) = (y(t_2, \cdots, t_{n+1}))(t_1). \tag{1}$$

(On notera que les opérateurs k et s transforment un cube dégénéré en un cube dégénéré, ce qui permet de les faire opérer sur les complexes singuliers $C(E)$ et $C(\Omega)$.)

En définitive, on a:

PROPOSITION 8. *L'application s définie par la formule* (1) *est un homomorphisme de degré $+1$ de $C(\Omega)$ dans $C(X)$, tel que $sdx + dsx = 0$ si* deg. $x > 0$. *Elle définit un homomorphisme*: $H_i(\Omega) \to H_{i+1}(X)$, $i > 0$, *qui coincide avec la suspension définie au* Chap. II, n° 7.

Note. La définition de la suspension que nous venons de donner a été simplifiée par le fait que nous avons annulé les cubes ponctuels de X dont la dimension est >0 (ce qui résultait des conventions générales sur les cubes dégénérés). En théorie singulière classique, définie au moyen des simplexes sans aucune "normalisation" de ce genre, on aurait dû prendre pour sy (y étant un simplexe de Ω) la différence entre le simplexe de dimension $n + 1$ de X que définit y de façon évidente (y étant de dimension n) et le simplexe ponctuel de dimension $n + 1$. Ceci explique la formule utilisée par Eilenberg-MacLane [14] pour définir la suspension (*Voir* Chapitre VI).

6. Quelques résultats généraux sur l'homologie des espaces de lacets

Nous conservons les notations et hypothèses des deux numéros qui précèdent. En outre, nous supposons que l'espace X étudié est simplement connexe. Il en résulte évidemment que le système local formé par $H(\Omega)$ sur X est trivial. Si A et B sont deux parties connexes de X, le système local formé par $H(\Omega)$ sur $A \times B$ est la *restriction* d'un système local défini sur $X \times X$, donc qui est trivial.

PROPOSITION 9. *Soit G un anneau principal, et supposons que $H_i(X, G)$ soit un G-module de type fini pour tout $i \geqq 0$. Alors $H_i(\Omega, G)$ est un G-module de type fini pour tout $i \geqq 0$.*

On a: $H_0(E_{x,X}) = G$, $H_i(E_{x,X}) = 0$ si $i > 0$, puisque $E_{x,X}$ est contractile: les modules d'homologie de $E_{x,X}$ sont donc de type fini. La proposition résulte alors immédiatement de la Proposition 1 du Chapitre III.

COROLLAIRE. *Dans les hypothèses précédentes, soient A et B deux parties de X telles que $H_i(A, G)$ et $H_i(B, G)$ soient de type fini pour tout $i \geqq 0$. Alors $H_i(E_{A,B}, G)$ est de type fini pour tout $i \geqq 0$.*

Puisque $H_0(A)$ et $H_0(B)$ sont de type fini, A et B ont un nombre fini de composantes connexes par arcs, A_k, B_j. Puisque $H_i(E_{A,B}) = \sum_{j,k} H_i(E_{A_k,B_j})$, on voit qu'on peut se borner au cas où A et B sont *connexes par arcs*.

Dans ce dernier cas, on applique la Prop. 1 du Chapitre III à l'espace $E_{A,B}$ fibré de fibre Ω et de base $A \times B$.

REMARQUES. 1. La Prop. 9 est applicable, en particulier, à tout polyèdre fini simplement connexe.

2. La Prop. 1 du Chap. III montre que, réciproquement, si $H_i(\Omega)$ est de type fini pour tout $i \geqq 0$, il en est de même de $H_i(X)$.

PROPOSITION 10. *Soit G un anneau principal, et supposons que $H_i(X, G) = 0$ pour $0 < i < p$. Alors la suspension Σ applique $H_i(\Omega, G)$ sur $H_{i+1}(X, G)$ pour $0 < i \leqq 2p - 2$, et est un isomorphisme pour $0 < i < 2p - 2$.*
En particulier, $H_i(\Omega, G) = 0$ pour $0 < i < p - 1$.

Ce n'est que la transcription du Corollaire 2 à la Prop. 5 du Chapitre III.

PROPOSITION 11. *Soit k un corps commutatif, et supposons que $H_i(X, k) = 0$ pour $i > n$ (n étant un entier fixé $\geqq 2$) et que $H_n(X, k) \neq 0$. Alors, pour tout entier $i \geqq 0$, il existe un entier j, $0 < j < n$, tel que $H_{i+j}(\Omega, k) \neq 0$.*

Raisonnons par l'absurde, et soit i un entier mettant en défaut la conclusion de la proposition. Quitte à remplacer i par un entier inférieur, on peut toujours supposer que $H_i(\Omega, k) \neq 0$. On a donc:

$$E_2^{n,i} = H_n(X, H_i(\Omega, k)) = H_n(X, k) \otimes H_i(\Omega, k) \neq 0.$$

Je dis que les éléments de $E_r^{n,i}$ sont des cycles pour d_r quel que soit $r \geqq 2$. Comme d_r applique $E_r^{n,i}$ dans $E_r^{n-r,i+r-1}$, on voit qu'on peut se borner aux différentielles d_r, $2 \leqq r \leqq n$. Mais pour celles-là, le terme $E_2^{n-r,i+r-1} = H_{n-r}(X, k) \otimes H_{i+r-1}(\Omega, k)$ est nul, d'après l'hypothèse faite sur i. Il en est donc de même de $E_r^{n-r,i+r-1}$, ce qui démontre notre affirmation.

Mais d'autre part, ces éléments ne peuvent être des bords pour la différentielle d_r, puisque celle-ci diminue le degré-base et qu'ils sont de degré-base maximum, n. Il suit de là que:

$$E_\infty^{n,i} = E_2^{n,i} \neq 0,$$

ce qui est absurde puisque $E_{x,X}$ est contractile et a donc tous ses groupes d'homologie nuls en dimensions strictement positives.

COROLLAIRE. *Dans les hypothèses précédentes, il existe une infinité de valeurs de i telles que* $H_i(\Omega, k) \neq 0$.

On notera que ce corollaire résulte directement du Corollaire à la Proposition 3 du Chapitre III.

7. Application au calcul des variations (théorie de Morse)

Soit X un espace de Riemann connexe et indéfiniment différentiable. Si a et b sont deux points de X, désignons par $d(a, b)$ la borne inférieure des longueurs (au sens de la métrique riemannienne donnée) des arcs différentiables joignant a et b; la fonction $d(a, b)$ est une *distance* sur X, compatible avec la topologie de X. Hopf et Rinow [17] ont montré que, lorsqu'on munit X de cette structure d'espace métrique, les deux conditions suivantes sont équivalentes:[5]

I) X est complet.

II) Toute partie bornée de X est relativement compacte.

Un espace de Riemann vérifiant ces conditions sera dit *complet* ("normal", dans la terminologie d'E. Cartan).

Soit alors X un espace de Riemann complet et connexe, et soient a et b deux points distincts de X (cette restriction n'étant d'ailleurs pas essentielle). Marston Morse [25], [26] a montré qu'il existe des relations étroites entre les propriétés homologiques de $E_{a,b}$ et les propriétés des géodésiques joignant a à b (nombre de telles géodésiques, nombre de points focaux sur une géodésique "non dégénérée"). En particulier, on a le résultat suivant:

PROPOSITION 12 (Marston Morse). *Soient X un espace de Riemann connexe et complet, a et b deux points distincts de X, $E_{a,b}$ l'espace des chemins tracés dans X et joignant a à b, k un corps commutatif. Si $H_i(E_{a,b}, k) \neq 0$ pour une infinité de valeurs de l'entier i, il existe une infinité de géodésiques de X joignant a à b.*

(On trouvera une démonstration de cette proposition dans le livre déjà cité de Seifert-Threlfall [27], §19, Satz III, tout au moins quand le corps k est celui des entiers modulo 2; leur démonstration est valable dans le cas général sans *aucun* changement.)

Les résultats du numéro précédent, joints à la Prop. 12, vont nous permettre de démontrer la Proposition suivante:

PROPOSITION 13. *Soit X un espace de Riemann connexe et complet tel que $H_i(X, Z) \neq 0$ pour au moins un entier $i \neq 0$. Si a et b sont deux points distincts de X, il existe une infinité de géodésiques de X joignant a à b.*

(Dans cet énoncé, Z désigne, comme d'ordinaire, le groupe additif des entiers.)

Soit T le revêtement universel de X; on peut munir T d'une structure d'espace de Riemann telle que la projection canonique $T \rightarrow X$ soit un isomorphisme local; il en résulte que T, muni de cette structure, est un espace de Riemann connexe et *complet*. Si a' désigne un point de T se projetant sur a, et si (b'_i)

[5] Hopf et Rinow ne démontrent ce résultat que lorsque l'espace de Riemann X est de dimension 2 et qu'il est muni d'une structure analytique réelle, mais leur démonstration vaut sans changement dans le cas qui nous intéresse.

désigne l'ensemble des points de T se projetant sur b, il y a une correspondance biunivoque (définie par la projection $T \to X$) entre les géodésiques de T joignant a' à l'un des b'_i et les géodésiques de X joignant a à b. Distinguons alors deux cas:

α) *Le groupe* $\pi_1(X)$ *a une infinité d'éléments* (exemple: X est un tore).

Il y a alors une infinité de b'_i ; comme sur tout espace de Riemann complet connexe il existe au moins une géodésique joignant deux points arbitraires [17], on en conclut que, pour tout i, il y a au moins une géodésique de T joignant a' à b'_i , d'où, par projection sur X, une infinité de géodésiques joignant a à b.

β) *Le groupe* $\pi_1(X)$ *est fini.*

Dans ce cas, il nous faut montrer qu'il existe une infinité de géodésiques de T joignant deux points distincts donnés. Je dis d'abord que $H_i(T, Z) \neq 0$ pour au moins un $i > 0$. Sinon, en effet, T serait acyclique et possèderait un groupe fini d'opérateurs sans points fixes, ce qu'on sait être impossible (*Voir* par exemple, [6], Exposé XII).

D'après le Lemme du Chapitre III, n° 3, il existe donc un corps k et un entier $i > 0$ tels que $H_i(T, k) \neq 0$. En outre, puisque T est simplement connexe, $i \geqq 2$. Appliquant alors le Corollaire de la Prop. 11, on voit qu'il existe une infinité de valeurs de i telles que $H_i(\Omega, k) \neq 0$, Ω désignant l'espace des lacets sur T.

Soient alors x et y deux points distincts de T. D'après le Corollaire 2 à la Prop. 5, $E_{x,y}$ et Ω sont de même type d'homotopie. Ils ont donc mêmes groupes d'homologie, et l'application de la Prop. 12 montre qu'il existe une infinité de géodésiques de T joignant x à y, ce qui achève la démonstration.

On notera que ce résultat est applicable à *tout espace de Riemann compact et connexe.*

Note. Il serait tout à fait désirable d'appliquer des méthodes analogues à celles de ce chapitre à l'*espace des chemins fermés de* X, espace qui est intimement lié aux *géodésiques fermées* de X (*Voir* [25], Chap. VIII). On sait que cet espace a été défini par M. Morse (*loc. cit.*) comme une limite des produits "cycliques" successifs de X avec lui-même et non comme un espace fonctionnel; c'est bien entendu ce qui en complique l'étude.

Il serait également intéressant d'appliquer les résultats de ce numéro à la théorie de la *catégorie* au sens de Lusternik-Schnirelmann. Il est assez naturel d'utiliser pour cela la notion de longueur, due à Froloff et Elsholz, et dont je rappelle la définition:

Soit Ω un espace connexe, $H^*(\Omega, k)$ l'anneau de cohomologie singulière de Ω à coefficients dans le corps k. On appelle *k-longueur* de Ω la borne supérieure des entiers n tels qu'il existe des éléments $x_1, \cdots, x_{n-1} \in H^*(\Omega, k)$, tous de dimension > 0, et de produit non nul.

Nous nous bornerons à donner le résultat suivant:

PROPOSITION 14. *Soit* X *un espace connexe par arcs et simplement connexe,* Ω *l'espace des lacets sur* X. *Si* k *est un corps commutatif quelconque, pour que la*

k-longueur de Ω soit infinie, il faut et il suffit que $H_i(\Omega, k) \neq 0$ pour une infinité de valeurs de l'entier i.

La nécessité est évidente. Pour voir la suffisance, appliquons les résultats du n° 2 (théorème de Hopf). Soit B un système minimal de générateurs homogènes de $H^*(\Omega, k)$. Distinguons deux cas:

α) *B a une infinité d'éléments.*

Alors, d'après le th. de Hopf, le produit d'un nombre quelconque de ces éléments est non nul, et la k-longueur de Ω est bien infinie.

β) *B a un nombre fini d'éléments.*

Soit alors q la borne supérieure des degrés des éléments de B. Si la k-longueur de Ω était un entier fini n, il en résulterait que $H^i(\Omega, k) = 0$ pour $i > q(n - 1)$, d'où, pour les mêmes valeurs de i, $H_i(\Omega, k) = 0$, contrairement à l'hypothèse faite.

COROLLAIRE. *Soit X un espace de Riemann compact connexe simplement connexe et non réduit à un point, Ω l'espace des lacets sur X. Pour tout corps k, la k-longueur de Ω est infinie.*

8. Application au calcul des variations: les géodésiques transversales à deux sous-variétés

Soit X un espace de Riemann compact, A et B deux sous-variétés de X. Marston Morse a montré que, si $H_i(E_{A,B}, k) \neq 0$ pour une infinité de valeurs de i (k étant un corps commutatif), alors il existe une infinité de géodésiques de X, dont l'origine appartient à A, l'extrémité à B, et qui sont *transversales* à A et B. Nous nous proposons de donner dans ce numéro des conditions suffisantes pour qu'il en soit ainsi.

L'espace $E_{x,B}$.

Commençons par étudier le cas où A est réduit au point x. Pour cela, considérons l'espace $E_{X,B}$; on sait (Prop. 7′) que cet espace admet une rétraction de déformation sur B, donc a mêmes groupes d'homologie et de cohomologie que B. D'autre part, si $f \in E_{X,B}$, désignons par $p(f)$ le point $f(0) \in X$. L'application p est continue, et on voit comme au n° 4 que *le triple* ($E_{X,B}$, p, X) *est un espace fibré*; il est clair que les *fibres* de cet espace fibré ne sont autres que les divers espaces $E_{x,B}$, $x \in X$. En définitive, nous avons donc obtenu *un espace fibré d'homologie isomorphe à celle de B, dont la fibre est $E_{x,B}$ et dont la base est l'espace X*. Cet espace généralise celui étudié au n° 5 (qui correspond au cas où B est réduit à un point). On tire de là:

PROPOSITION 15. *Soient X un espace connexe par arcs et simplement connexe, B un sous-espace de X, $x \in X$. Supposons que:*

(a) $H_n(X, k) \neq 0$ *et* $H_i(X, k) = 0$ *si* $i > n$ (*n étant un entier* $\geqq 2$).

(b) $H_i(B, k) = 0$ *si* $i \geqq n$, *k désignant un corps commutatif.*

Il existe alors une infinité de valeurs de l'entier i telles que l'on ait $H_i(E_{x,B}, k) \neq 0$.

Raisonnons par l'absurde, et soit m le plus grand entier tel que $H_m(E_{x,B}, k) \neq 0$; d'après la Prop. 3 du Chapitre III, on a:

$$H_{m+n}(E_{X,B}, k) = H_n(X, k) \otimes H_m(E_{x,B}, k) \neq 0,$$

ce qui est absurde puisque $H_{m+n}(E_{X,B}, k) = H_{m+n}(B, k) = 0$.

Application aux géodésiques.

Proposition 16. *Soit X un espace de Riemann compact connexe et simplement connexe et soient A et B deux sous-variétés fermées de X, telles que $A \cap B = \emptyset$; on suppose en outre que A est déformable en un point $x \in X$. Il existe alors une infinité de géodésiques de X qui sont transversales à A et B.*

Soit k un corps quelconque, n la dimension de X; on a $n \geqq 2$ puisque X est compact et simplement connexe. Il suit de là que le couple (X, B) vérifie toutes les conditions de la Prop. 15. On en conclut qu'il existe une infinité de valeurs de i telles que:

$$H_i(E_{x,B}, k) \neq 0.$$

Mais, d'après la Prop. 5 du n° 4, $E_{A,B}$ a même type d'homotopie que $A \times E_{x,B}$, d'où le fait que $H_i(E_{A,B}, k) \neq 0$ pour une infinité de valeurs de l'entier i, ce qui démontre la proposition.

Note. On trouvera une démonstration des résultats utilisés dans ce n° dans le livre de Seifert-Threlfall, [27], §22, n° 7.

9. Homologie et cohomologie de l'espace des lacets sur une sphère.

Prenons pour espace X la sphère $\mathbf{S}_n$ ($n \geqq 2$), et étudions l'espace Ω des lacets en un point $x \in \mathbf{S}_n$. Si E désigne l'espace des chemins d'origine x tracés dans $\mathbf{S}_n$, on sait que E est un espace fibré contractile, de fibre Ω, et de base $\mathbf{S}_n$. On peut donc lui appliquer la *suite exacte de* Wang (Chapitre III, n° 6):

$$\cdots \leftarrow H_i(E) \leftarrow H_i(\Omega) \leftarrow H_{i-n+1}(\Omega) \leftarrow H_{i+1}(E) \leftarrow \cdots$$

Puisque E est contractile, $H_i(E) = 0$ pour $i > 0$, d'où:

$$H_i(\Omega) = H_{i-n+1}(\Omega) \qquad \text{si} \quad i > 0.$$

Comme $H_0(\Omega) = Z$ et $H_i(\Omega) = 0$ si $i < 0$, on voit que l'on a ainsi obtenu:

Proposition 17. *Les groupes d'homologie à coefficients entiers de l'espace Ω des lacets sur $\mathbf{S}_n$ sont les suivants:*

$$H_i(\Omega) = Z \qquad si \quad i \equiv 0 \mod. (n-1)$$

$$H_i(\Omega) = 0 \qquad si \quad i \not\equiv 0 \mod. (n-1)$$

(Ce résultat est dû essentiellement à M. Morse [25].)

Nous allons maintenant étudier la *structure multiplicative* de l'anneau de cohomologie à coefficients entiers de Ω; cette structure jouera un rôle important au Chapitre V.

Pour cela, écrivons la suite exacte de Wang en *cohomologie*; on obtient le même résultat que plus haut, avec le complément suivant: *L'isomorphisme* $\theta : H^i(\Omega) \to H^{i-n+1}(\Omega)$, *défini par la suite exacte de Wang, est une dérivation si n est impair et une antidérivation si n est pair* (Chap. III, Prop. 7).

Définissons une famille $\{e_p\}$ d'éléments de $H^*(\Omega)$ de la façon suivante: $e_0 = 1$, $\theta e_p = e_{p-1}$ $(p \geqq 1)$.

Il est clair que ces relations définissent sans ambiguité les e_p par récurrence sur p, et que e_p forme une base de $H^{p(n-1)}(\Omega)$. Pour connaitre la structure multiplicative de $H^*(\Omega)$, il nous suffit donc de calculer $e_p \cdot e_q \in H^{(p+q)(n-1)}(\Omega)$; c'est ce qui est fait dans la proposition suivante:

PROPOSITION 18. *Les hypothèses et notations étant celles de la Prop. 17, soit* $\{e_p\}(p = 0, 1, \cdots)$ *la base de* $H^*(\Omega)$ *définie comme il vient d'être dit. Les éléments* e_p *sont de degré* $p(n - 1)$ *et vérifient la loi de multiplication:*

$$e_p \cdot e_q = c_{p,q} e_{p+q}, \qquad \text{où } c_{p,q} \text{ est donné par:}$$

(α) *Si n est impair*: $$c_{p,q} = \frac{(p+q)!}{p!\,q!}.$$

(β) *Si n est pair* : $$c_{p,q} = 0 \quad \text{si } p \text{ et } q \text{ sont impairs},$$

$$c_{p,q} = \frac{[(p+q)/2]!}{[p/2]!\,[q/2]!} \text{ sinon.}$$

(On a noté $[x]$ la partie entière du nombre x.)

Calculons $y = \theta(e_p \cdot e_q)$. Puisque θ est une dérivation (si n est impair), ou une antidérivation (si n est pair), on a dans tous les cas:

$$\begin{aligned} y &= \theta e_p \cdot e_q + (-1)^{p(n-1)} e_p \cdot \theta e_q = e_{p-1} \cdot e_q + (-1)^{p(n-1)} e_p \cdot e_{q-1} \\ &= (c_{p-1,q} + (-1)^{p(n-1)} c_{p,q-1}) \cdot e_{p+q-1}. \end{aligned}$$

Mais d'autre part, $e_p \cdot e_q = c_{p,q} e_{p+q}$, d'où $y = c_{p,q} \cdot e_{p+q-1}$. En comparant, on obtient:

$$c_{p,q} = c_{p-1,q} + (-1)^{p(n-1)} c_{p,q-1}.$$

Il est clair que cette relation détermine $c_{p,q}$ par récurrence sur $p + q$ à partir de $c_{0,0} = 1$. Il suffit alors de vérifier que les expressions que nous avons données dans l'énoncé de la Prop. 18 satisfont à la relation précédente, ce qui résulte des propriétés connues des coefficients binomiaux.

COROLLAIRE 1. *Si n est impair, on a:* $(e_1)^p = p!\,e_p$. *Si n est pair, on a:* $(e_1)^2 = 0$, $(e_2)^p = p!\,e_{2p}$, $e_1 \cdot e_{2p} = e_{2p} \cdot e_1 = e_{2p+1}$.

(On observera que les formules précédentes suffisent à retrouver la table de multiplication des $\{e_p\}$.)

COROLLAIRE 2. *Designons par* Ω_n *l'espace des lacets sur la sphère* $\mathbf{S}_n$. *L'algèbre* $H^*(\Omega_n)$, *n pair, est isomorphe au produit tensoriel des algèbres* $H^*(\mathbf{S}_{n-1})$ *et* $H^*(\Omega_{2n-1})$.

Cela résulte immédiatement de la Proposition 18.

COROLLAIRE 3. *Soit K un corps de caractéristique nulle. Alors, si n est impair, $H^*(\Omega_n, K)$ est isomorphe à une algèbre de polynomes à un générateur de degré $(n-1)$; si n est pair, $H^*(\Omega_n, K)$ est isomorphe au produit tensoriel d'une algèbre extérieure engendrée par un élément de degré $(n-1)$ et d'une algèbre de polynomes engendrée par un élément de degré $2(n-1)$.*

Cela résulte immédiatement du Corollaire 1.

Prenons maintenant pour coefficients un corps K de caractéristique p, et désignons par f_i les $e_{(p^i)}$, $i = 0, 1, \cdots$. On tire facilement de la Prop. 18 le fait que $(f_i)^p = 0$ et que les $f_1^{\alpha_1} \cdots f_q^{\alpha_q} (0 \leqq \alpha_i < p)$ forment une base de $H^*(\Omega, K)$ (Cf. J. Dieudonné, *Semi-dérivations et formule de Taylor en caractéristique* p, Archiv der Math., *2*, 1950, p. 364–366). D'où:

COROLLAIRE 4. *Soit K un corps de caractéristique p; si n est impair, l'algèbre $H^*(\Omega_n, K)$ est isomorphe à une algèbre de polynomes à une infinité de générateurs f_i $(i = 0, 1, \cdots)$, modulo l'idéal engendré par les $(f_i)^p$. Les f_i sont de degré $p^i(n-1)$.*

Il suit de là que, si $p = 2$, $H^*(\Omega_n, K)$ est une *algèbre extérieure* engendrée par des éléments de degré $2^i(n-1)$ (n pair ou impair).

Note. Les corollaires 3 et 4 sont valables sans changement pour l'espace des lacets sur un espace X ayant même cohomologie (à valeurs dans K) que $\mathbf{S}_n$ et simplement connexe.

CHAPITRE V. GROUPES D'HOMOTOPIE

1. Méthode générale

Soit X un espace connexe par arcs dont l'homologie est supposée connue; nous voulons déterminer, au moins en partie, les groupes d'homotopie de X.

Pour cela, définissons une suite d'espaces (X_n, T_n) de la manière suivante:

$X_0 = X$;
T_1 est le revêtement universel de X_0 ;
X_1 est l'espace des lacets sur T_1 ;
T_2 est le revêtement universel de X_1 ;
X_2 est l'espace des lacets sur T_2 ;
etc.

LEMME 1. *Les groupes d'homotopie des espaces X_n sont donnés par les formules:*

$$\pi_0(X_n) = 0, \qquad \pi_1(X_n) = \pi_{n+1}(X), \cdots, \qquad \pi_i(X_n) = \pi_{i+n}(X).$$

Ces formules sont vraies si $n = 0$; raisonnons par récurrence, et supposons-les vraies pour $n - 1$. Comme T_n est le revêtement universel de X_{n-1} on a:

$$\pi_0(T_n) = \pi_1(T_n) = 0, \qquad \pi_i(T_n) = \pi_{i+n-1}(X) \qquad (i \geqq 2).$$

Mais d'autre part, si A est un espace connexe par arcs et simplement connexe et B est l'espace des lacets sur A, on a $\pi_i(B) = \pi_{i+1}(A)$, comme il résulte de la définition des groupes d'homotopie donnée par Hurewicz [18], ou encore, si l'on veut, de la suite exacte d'homotopie appliquée à l'espace fibré des chemins de A dont l'origine est fixée.

En appliquant ceci à $A = T_n$, $B = X_n$, on obtient le résultat cherché.

COROLLAIRE. *Si* $n \geqq 1$, *on a:* $H_1(X_n, Z) = \pi_{n+1}(X)$.

Ainsi, si l'on pouvait calculer les groupes d'homologie à coefficients entiers des espaces X_n et T_n, on connaîtrait les groupes d'homotopie de X. En fait, les méthodes à notre disposition sont trop faibles pour pouvoir satisfaire à une pareille exigence. Cependant, en utilisant les résultats du Chapitre IV nous obtiendrons des relations étroites entre $H(T_n)$ et $H(X_n)$, et en utilisant la suite spectrale des revêtements (Chapitre I, n°6), nous obtiendrons également des relations entre $H(T_{n+1})$ et $H(X_n)$. L'étude de cette dernière suite spectrale sera grandement facilitée par le fait que le groupe fondamental de X_n (i.e. $\pi_{n+1}(X)$) opère *trivialement* sur les groupes d'homologie et de cohomologie de T_{n+1} si $n \geqq 1$; en effet, X_n est alors un H-espace (Chap. IV, Prop. 1) et tout H-espace jouit de cette propriété (Chapitre IV, Cor. à la Prop. 3).

Conditions de validité.

La méthode qui précède n'est pas applicable telle quelle à tous les espaces X connexes par arcs. En effet, pour pouvoir utiliser le revêtement universel de l'espace X_n, nous devons nous placer dans les conditions d'application du Chap. I, n°6, c'est-à-dire exiger que X_n soit localement connexe par arcs et localement simplement connexe.[6]

Nous allons indiquer une propriété de X qui entraîne que les conditions précédentes soient remplies:

DÉFINITION. *Nous dirons qu'un espace* X *est* (*ULC*) *s'il existe un voisinage* $\mathfrak{U}$ *de la diagonale de* $X \times X$, *et une application continue* $F: \mathfrak{U} \times I \to X$, *telle que:*

$$\text{(a)} \qquad F(x, x, t) = x \quad \textit{pour} \quad x \in X,\ t \in I;$$

$$\text{(b)} \qquad F(x, y, 0) = x, \qquad F(x, y, 1) = y \quad \textit{pour} \quad (x, y) \in \mathfrak{U}.$$

EXEMPLE: Tout rétracte absolu de voisinage, et en particulier tout polyèdre, est (ULC).

Si X est (ULC), il en est de même de l'espace des lacets sur X et du revêtement universel de X, comme on le voit tout de suite. Il suit de là que les espaces X_n et T_n attachés à X sont (ULC), et, a fortiori, localement connexes par arcs, et localement simplement connexes.[7]

Dans la suite de ce chapitre, nous nous bornerons à étudier l'homotopie des espaces (ULC).

---

[6] On peut toutefois se débarrasser de cette condition; pour cela, il faut renoncer à utiliser les *espaces* X_n et T_n et se borner à parler de leurs "complexes singuliers". On doit alors transposer les Chapitres II et IV pour les mettre en accord avec ce point de vue, ce qui n'offre pas de difficultés essentielles. On peut ainsi établir les Prop. 1 et 2 du n° 2 en toute généralité, telles qu'elles sont énoncées dans [28].

[7] Signalons que, dans ce cas, X_n est homéomorphe à l'espace des applications inessentielles de la sphère S_n dans l'espace X qui envoient un point fixé de S_n en un point fixé de X.

2. Premiers résultats

PROPOSITION 1. *Soit X un espace (ULC) tel que $\pi_0(X) = \pi_1(X) = 0$, et supposons que les groupes $H_i(X, Z)$ soient de type fini pour tout $i \geqq 0$. Alors les groupes $\pi_i(X)$ sont de type fini pour tout $i \geqq 0$.*

Il nous suffit évidemment de montrer que les groupes d'homologie des espaces X_n et T_n sont de type fini en toute dimension.

Ceci est vrai pour $X_0 = X$ par hypothèse; pour T_1, puisque $T_1 = X_0$; c'est aussi vrai pour X_1, puisque X_1 est l'espace des lacets sur T_1 (appliquer la Prop. 9 du Chap. IV avec $G = Z$).

Raisonnons par récurrence sur n, et supposons ce fait démontré pour $n - 1$, avec $n \geqq 2$.

Montrons que $H_i(T_n, Z)$ est de type fini pour tout $i \geqq 0$. Pour cela, soit $\Pi = \pi_n(X)$ le groupe fondamental de X_{n-1} ; Π est un groupe abélien de type fini puisqu'il est égal à $H_1(X_{n-1}, Z)$, et il opère trivialement sur les groupes d'homologie de T_n, d'après ce qui a été dit au n°1. Considérons la suite spectrale attachée au revêtement $T_n \to X_{n-1}$; d'après la Prop. 4 du Chap. I, le terme $E_2^{p,q}$ de cette suite est isomorphe à $H_p(\Pi, H_q(T_n, Z))$, et le terme E_∞ est le groupe gradué associé à $H(X_{n-1}, Z)$. Puisque Π opère trivialement sur $H_q(T_n, Z)$ on a:

$$E_2^{p,q} = H_p(\Pi, Z) \otimes H_q(T_n, Z) + \operatorname{Tor}(H_{p-1}(\Pi, Z), H_q(T_n, Z)).$$

On peut alors recopier le raisonnement de la Prop. 1 du Chapitre III, partie (*b*): puisque Π et les $H_i(X_{n-1}, Z)$ sont de type fini, on en tire que les $H_i(T_n, Z)$ sont de type fini.

Cela étant, la Prop. 9 du Chap. IV déjà citée montre que $H_i(X_n, Z)$ est de type fini pour tout i, ce qui achève la démonstration.

Variantes. En compliquant un peu la démonstration, on peut se borner à supposer que $H_i(X, Z)$ est de type fini pour $i < n$ $(n \geqq 2)$; on montre alors que $\pi_i(X)$ est de type fini pour $i < n$, et que, pour $i = n$, le noyau de l'homomorphisme: $\pi_n(X) \to H_n(X, Z)$ est de type fini ainsi que le quotient de $H_n(X, Z)$ par son image. On peut également remplacer l'hypothèse "X est simplement connexe" par la suivante: "X est simple en toute dimension". Comme nous n'utiliserons pas ces résultats, nous en laissons la vérification au lecteur.

Rappelons le résultat suivant, bien connu:

Si X est un polyèdre fini, $\pi_i(X)$ est *dénombrable* (immédiat par approximation simpliciale, Cf. [18]).

PROPOSITION 2. *Soit X un espace (ULC) tel que $\pi_0(X) = \pi_1(X) = 0$ et que les groupes $H_i(X, Z)$ soient de type fini pour tout i. Si k est un corps, supposons que $H_i(X, k) = 0$ pour $0 < i < n$; alors $\pi_i(X) \otimes k = 0$ pour $0 < i < n$, et $\pi_n(X) \otimes k = H_n(X, k)$.*

Nous prouverons d'abord le résultat suivant:

LEMME 2. *Avec les hypothèses précédentes on a (si $j \leqq n - 1$):*

$$\begin{cases} H_i(X_j, k) = 0 \quad si \quad i + j < n \quad et \quad i > 0, \\ H_i(X_j, k) = H_n(X, k) \quad si \quad i + j = n. \end{cases}$$

Nous raisonnerons par récurrence sur l'entier j, le lemme étant visiblement vrai si $j = 0$. Supposons-le vrai pour $j - 1$ ($1 \leqq j \leqq n - 1$).

Considérons d'abord T_j, revêtement universel de X_{j-1}; soit Π le groupe fondamental de X_{j-1}; on a $\Pi \otimes k = H_1(X_{j-1}) \otimes k = H_1(X_{j-1}, k) = 0$. Comme Π est de type fini d'après la Prop. 1, il suit de là que Π est un groupe fini dont l'ordre est premier à la caractéristique de k. En appliquant alors le Cor. 2 à la Prop. 4 du Chap. I, on voit que $H_i(T_j, k) = H_i(X_{j-1}, k)$ pour tout $i \geqq 0$.

En appliquant la Prop. 10 du Chap. IV à T_j et à son espace de lacets X_j, on obtient le résultat cherché.

Ce lemme une fois démontré, on peut écrire:
$\pi_i(X) \otimes k = H_1(X_{i-1}) \otimes k = H_1(X_{i-1}, k)$, d'où:
si $i < n$, $\pi_i(X) \otimes k = 0$, et
si $i = n$, $\pi_n(X) \otimes k = H_n(X, k)$, cqfd.

REMARQUES. 1. Il résulte de la démonstration précédente et du diagramme (I') du Chap. II, n°7, que l'isomorphisme entre $\pi_n(X) \otimes k$ et $H_n(X, k)$ est défini par l'homomorphisme canonique: $\pi_n(X) \rightarrow H_n(X)$. 2. Si on remplace le corps k par l'anneau Z des entiers dans l'énoncé de la Prop. 2, on obtient un théorème classique d'Hurewicz [18]; la démonstration précédente est encore valable, et se simplifie même notablement, du fait que les groupes Π qui y interviennent sont réduits à l'élément neutre. 3. En compliquant un peu la démonstration, on peut prouver ceci: si k est de caractéristique p, les composantes p-primaires de $\pi_n(X)$ et de $H_n(X)$ sont isomorphes. (Rappelons qu'on appelle composante p-primaire d'un groupe abélien A le sous-groupe de A formé des éléments dont l'ordre est une puissance de p.)

3. Finitude des groupes d'homotopie des sphères de dimension impaire

LEMME 3. *Soit X un espace tel que $\pi_0(X) = \pi_1(X) = 0$ et que l'algèbre de cohomologie de X à coefficients dans un corps K soit isomorphe à une algèbre de polynomes $K[u]$, engendrée par un élément u de degré n pair ($n \geqq 2$).*

Dans ces conditions, l'algèbre de cohomologie $H^*(\Omega, K)$ de l'espace Ω des lacets sur X est isomorphe à une algèbre extérieure engendrée par un élément v de degré $n - 1$.

(Autrement dit, $H^0(\Omega, K) = H^{n-1}(\Omega, K) = K$, et $H^i(\Omega, K) = 0$ si $i \neq 0$ et $i \neq n - 1$.)

D'après la Prop. 10 du Chap. IV, $H^i(\Omega, K)$ est isomorphe à $H^{i+1}(X, K)$ pour $i < 2n - 2$. D'où le fait que $H^i(\Omega, K) = 0$ pour $0 < i < n - 1$.

D'autre part, considérons la suite spectrale de cohomologie du n°5 du Chap. IV. Vu les hypothèses faites, on peut appliquer la Prop. 8 du Chap. II qui montre que le terme E_2 est isomorphe au produit tensoriel gauche d'*algèbres*: $H^*(X, K) \otimes H^*(\Omega, K)$. Nous identifierons $H^*(X, K)$ et $H^*(\Omega, K)$ aux sous-algèbres $H^*(X, K) \otimes 1$ et $1 \otimes H^*(\Omega, K)$ de ce produit tensoriel. On observera enfin que les seules différentielles d_r éventuellement non nulles sont celles qui correspondent à $r = n, 2n, 3n, \cdots$ etc.

D'après la Prop. 10 du Chap. IV déjà citée, $H^{n-1}(\Omega, K)$ est l'ensemble des multiples d'un élément v tel que:

$$d_n v = u.$$

Designons par U l'ensemble des éléments de E_n dont le degré-fibre est inférieur ou égal à $n - 1$. Les éléments u^k et $u^k \otimes v$ forment une base homogène de U, et l'on a:

$$d_n(u^k) = 0, \qquad d_n(u^k \otimes v) = u^{k+1} \qquad (k = 0, 1, \cdots).$$

Il suit de là que tous les cocycles de U sont des cobords (sauf l'élément unité 1), et il en résulte que l'image U_r de U dans les termes E_r suivants est nulle en dimension >0.

Nous allons maintenant montrer qu'il n'existe aucun élément de $H^*(\Omega, K)$ de degré $\geqq n$ et non nul (ce qui achèvera la démonstration). Raisonnons par l'absurde. et soit $w \neq 0$, homogène et de degré $\geqq n$, et appartenant à $H^*(\Omega, K)$; on peut supposer en outre que w est de degré minimum parmi tous ceux qui jouissent de cette propriété. Nous allons examiner les différentielles successives de w. Vu la dernière hypothèse faite sur w, les $d_r w$ appartiennent à U_r, et sont donc nuls si $r > n$. Ceci montre que la seule différentielle à examiner est d_n. Or $d_n w = u \otimes w'$, avec $w' \in H^*(\Omega, K)$ et deg. $w' =$ deg. $w - n + 1$. On a donc $w' = kv$, $k \in K$, et $d_n w = ku \otimes v$. Mais puisque $d_n(u \otimes v) = u^2 \neq 0$, ceci entraîne $k = 0$ et $d_n w = 0$. Il suit de là que toutes les différentielles de w sont nulles, et que w définit un élément non nul de E_∞ ce qui est absurde puisque E_∞ est nul en toute dimension >0.

Ceci achève la démonstration du lemme.

Note. Ce lemme peut être considéré comme une réciproque (partielle) d'un théorème de A. Borel [1], disant que, si l'algèbre de cohomologie de Ω est une algèbre extérieure, alors celle de X est une algèbre de polynomes. On observera que ces deux résultats sont valables sans hypothèse sur le corps de base, alors que, "en sens inverse", si l'on suppose que l'algèbre de cohomologie de X est une algèbre extérieure à un générateur, celle de Ω n'est une algèbre de polynomes que si la caractéristique de K est nulle (Cf. Chapitre IV, Cor. 3 à la Prop 18).

Soit $\mathbf{S}_n$ une sphère de dimension impaire ($n \geqq 3$), et définissons les espaces X_m et T_m comme il a été dit au n°1. Nous allons déterminer $H^*(X_m, K)$ et $H^*(T_m, K)$, K étant un corps de *caractéristique nulle.*

Puisque $T_1 = X$, X_1 est l'espace des lacets sur $\mathbf{S}_n$ et d'après le Cor. 3 à la Prop. 18 du Chap. IV, $H^*(X_1, K)$ est isomorphe à une algèbre de polynomes à un générateur de degré $n - 1$. Comme $T_2 = X_1$, il en résulte que $H^*(X_2, K)$ est isomorphe à une algèbre extérieure engendrée par un élément de degré $n - 2$ (Lemme 3). Ceci signifie que $H^*(X_2, K) = H^*(\mathbf{S}_{n-2}, K)$. En utilisant à nouveau le Cor. 3 à la Prop. 18 du Chap. IV, on voit que $H^*(X_3, K)$ est isomorphe à une algèbre de polynomes engendrée par un élément de degré $n - 3$. (Ceci est licite, car la démonstration de ce corollaire s'appuyait uniquement sur la suite exacte de Wang, qui est valable sous des hypothèses purement homologiques.) On peut continuer cette détermination de proche en proche, et l'on trouve alternativement une algèbre de polynomes et une algèbre extérieure. En particulier, $H^*(X_{n-1}, K)$ est une algèbre extérieure engendrée par un élément de degré 1.

Soit T_n le revêtement universel de X_{n-1} ; puisque $\pi_1(X_{n-1}) = \pi_n(\mathbf{S}_n) = Z$, on peut appliquer à ce revêtement le Cor. 1 à la Prop. 4 du Chap. I et on voit ainsi que $H^i(T_n, K) = 0$ si $i > 0$. (Comparer avec le fait que le revêtement universel de T, tore à une dimension, est R.) Il suit de là que $H_i(T_n, K) = 0$ si $i > 0$, d'où (Prop. 2) $\pi_i(T_n) \otimes K = 0$ pour tout i. Comme $\pi_i(T_n) = \pi_{i+n-1}(\mathbf{S}_n)$ $(i \geqq 2)$, il suit de là que:

$$\pi_i(\mathbf{S}_n) \otimes K = 0 \qquad \text{si } i > n.$$

Cette relation signifie que le groupe $\pi_i(\mathbf{S}_n)$ est un groupe de torsion $(i > n)$; mais comme c'est un groupe de type fini (Prop. 1), c'est donc un groupe fini, et nous avons démontré la proposition suivante:

PROPOSITION 3. *Les groupes $\pi_i(\mathbf{S}_n)$ $(i > n)$ sont finis si n est impair.*

Note. On pourrait étudier par un procédé analogue les groupes d'homotopie des sphères de dimension paire. Les calculs étant plus compliqués, nous avons préféré suivre une méthode indirecte que l'on trouvera au n°6.

4. Calculs auxiliaires

Dans tout ce n°, X désignera un espace connexe par arcs et simplement connexe, Ω l'espace des lacets tracés dans X. On notera E_r la suite spectrale de cohomologie de l'espace des chemins tracés dans X et d'origine fixée (Cf. Chap. IV, n°5), les coefficients étant pris dans un *corps K de caractéristique p*. Nous écrirons $H^*(X)$ et $H^*(\Omega)$ au lieu de $H^*(X, K)$ et $H^*(\Omega, K)$.

Ces conventions étant posées, donnons d'abord un Lemme qui est une légère variante du Cor. 4 à la Prop. 18 du Chap. IV:

LEMME 4. *Supposons que $H^i(X) = H^i(\mathbf{S}_q)$ pour $i \leqq p(q-1)+1$ (q impair $\geqq 3$). Alors le sous-espace de $H^*(\Omega)$ formé des éléments de degré $\leqq p(q-1)$ admet une base homogène formée des élements:*

$$\{1, y, y^2, \cdots, y^{p-1}, z\} \quad \textit{où} \quad \deg. y = q-1, \deg. z = p(q-1), \qquad y^p = 0.$$

En dimension inférieure ou égale à $p(q-1)+1$, on a $E_2 = H^*(X) \otimes H^*(\Omega)$. Il en résulte que tout élément homogène de E_2 dont le degré total est $\leqq p(q-1)+1$ appartient soit à $H^*(\Omega)$, soit à $x \otimes H^*(\Omega)$, où x désigne un élément non nul de $H^q(X)$. Puisque les différentielles d_r augmentent le degré total d'une unité et le degré-base de r unités, on voit que, pour les éléments de degré total $\leqq p(q-1)$, la seule différentielle à considérer est d_q. Comme le groupe terminal E_∞ doit être nul en toute dimension strictement positive, on en conclut que d_q définit *un isomorphisme θ de $H^i(\Omega)$ sur $H^{i-q+1}(\Omega)$ pour* $0 < i \leqq p(q-1)$.

En outre, q étant impair, cet isomorphisme est une *dérivation*. De la première propriété de θ, on tire que $H^i(\Omega) = 0$ si $i \not\equiv 0$ mod.$(q - 1)$ et $H^i(\Omega) = K$ si $i \equiv 0$ mod.$(q - 1)$, pour $i \leqq p(q - 1)$. On désignera par y un élément non nul de $H^{q-1}(\Omega)$, par z un élément non nul de $H^{p(q-1)}(\Omega)$. De la deuxième propriété de θ, on tire que $\theta(y^j) = j \cdot y^{j-1} \cdot \theta y$, d'où $y^j \neq 0$ si $j < p$, et $y^p = 0$. Ceci achève la démonstration.

LEMME 5. *Supposons que le sous-espace de $H^*(X)$ formé des éléments de degré $\leqq mp$ (m pair $\geqq 2$) admette une base formée des éléments homogènes:*

$$\{1, y, y^2, \cdots, y^{p-1}, z\}$$

où deg. $y = m$, deg. $z = pm$ *et* $y^p = 0$. *Alors le sous-espace de $H^*(\Omega)$ formé des éléments de degré $\leqq mp - 2$ admet une base formée des éléments homogènes $\{1, v, t\}$ où* deg. $v = m - 1$ *et* deg. $t = mp - 2$.

En dimension $\leqq mp$, $E_2 = H^*(X) \otimes H^*(\Omega)$ et d'autre part, d'après la Prop. 10 du Chap. IV, $H^i(\Omega) = 0$ si $0 < i < m - 1$, et $H^{m-1}(\Omega)$ est engendré par un élément v tel que $d_m v = y$.

On tire de là que les éléments de E_m de degré-fibre $\leqq m - 1$ et de degré total $\leqq mp - 1$ forment un sous-espace U de E_m, stable pour d_m, et admettant la base homogène suivante:

$$\{1, y, y^2, \cdots, y^{p-1}, v, y \otimes v, y^2 \otimes v, \cdots, y^{p-1} \otimes v\}.$$

La différentielle d_m y est donnée par les formules:

$$d_m y^k = 0 \quad \text{pour tout } k, \qquad d_m y^k \otimes v = y^{k+1}.$$

Il suit de là que tous les cocycles de U sont des cobords, à la seule exception des combinaisons linéaires de 1 et de $y^{p-1} \otimes v$ (ce dernier parce que $y^p = 0$). En outre ces éléments sont des cocycles pour les différentielles d_r ($r > m$) vu que leur degré-fibre est 0 et $m - 1$.

Cela étant, on montre comme dans le lemme 3 que $H^i(\Omega) = 0$ pour $m - 1 < i < mp - 2$. Par contre, en dimension $mp - 2$, il doit y avoir un élément t tel que:

$$d_{m(p-1)} t = y^{p-1} \otimes v,$$

sinon, $y^{p-1} \otimes v$ définirait un élément non nul de E_∞, ce qui est impossible. Enfin, tout élément de $H^{pm-2}(\Omega)$ est un multiple scalaire de t, car tout autre élément serait un cocycle pour toutes les différentielles d_r, donc définirait encore un élément non nul de E_∞. La démonstration est donc achevée.

5. Le premier groupe d'homotopie d'une sphère de dimension impaire qui est non nul modulo p

Dans ce numéro, X sera une sphère de dimension impaire $2n + 1$ ($n \geqq 1$), et X_i sera l'espace défini à partir de X comme il a été dit au n°1. Nous noterons encore $H^*(X_i)$ l'algèbre de cohomologie de X_i à coefficients *dans un corps de caractéristique* p. Nous allons calculer les premiers groupes de cohomologie des X_i :

LEMME 6. *Les algèbres de cohomologie $H^*(X_{2i-1})$ et $H^*(X_{2i})$, $1 \leqq i \leqq n$, admettent les bases homogènes suivantes:*

$$\begin{cases} H^*(X_{2i-1}): \text{base } \{1, x, x^2, \cdots, x^{p-1}, y\} \text{ (en dimension } \leqq p(2n-2i+2)), \\ \qquad \text{où deg. } x = 2n-2i+2, \text{ deg. } y = p(2n-2i+2),\ x^p = 0. \\ H^*(X_{2i}) \quad : \text{base } \{1, v, t\} \text{ (en dimension } \leqq p(2n-2i+2)-2) \\ \qquad \text{où deg. } v = 2n-2i+1, \text{ et deg. } t = p(2n-2i+2)-2. \end{cases}$$

Pour $i = 1$, le lemme résulte immédiatement des lemmes 4 et 5. A partir de là, raisonnons par récurrence sur l'entier i $(2 \leqq i \leqq n)$.

Nous devons d'abord déterminer $H^*(X_{2i-1})$ jusqu'à la dimension $p(2n - 2i + 2)$; je dis que nous pouvons appliquer le lemme 4, en posant $X = X_{2i-2}$, $\Omega = X_{2i-1}$, $q = 2n - 2i + 3$. En effet, d'après l'hypothèse de récurrence, on a $H^*(X_{2i-2}) = H^*(\mathbf{S}_q)$ pour les dimensions $\leqq p(2n - 2i + 4) - 3$ et il nous faut seulement vérifier que:

$$p(2n - 2i + 4) - 3 \geqq p(q - 1) + 1;$$

or ceci s'écrit: $p(2n - 2i + 4) - 3 \geqq p(2n - 2i + 2) + 1$, ou encore $2p \geqq 4$, ce qui est bien exact.

Ceci fait, la détermination de $H^*(X_{2i})$ résulte tout de suite du Lemme 5.

Nous allons tirer de là la proposition suivante:

PROPOSITION 4. *Désignons par F_p le corps fini à p éléments, p premier. Si m est impair $\geqq 3$, on a:*

$$\begin{cases} \pi_i(\mathbf{S}_m) \otimes F_p = 0 \quad \text{pour} \quad m < i < m + 2p - 3, \\ \pi_i(\mathbf{S}_m) \otimes F_p = F_p \quad \text{pour} \quad i = m + 2p - 3. \end{cases}$$

Posons $m = 2n + 1$ pour nous conformer aux conventions de ce n°. D'après le lemme 6, l'espace X_{2n} défini à partir de $X = \mathbf{S}_{2n+1}$ comme il a été dit au n°1 a pour cohomologie à coefficients dans F_p les groupes suivants:

$$H^0(X_{2n}) = H^1(X_{2n}) = H^{2p-2}(X_{2n}) = F_p \text{ et } H^i(X_{2n}) = 0 \text{ si } 1 < i < 2p - 2.$$

Le groupe fondamental de X_{2n} est $\pi_{2n+1}(\mathbf{S}_{2n+1}) = Z$, et son revêtement universel est T_{2n+1}; en outre Z opère trivialement sur les groupes d'homologie et de cohomologie de T_{2n+1} (Cf. n°1). En appliquant le Cor. 1 à la Prop. 4 du Chap. I, on trouve alors que:

$$H^0(T_{2n+1}) = H^{2p-2}(T_{2n+1}) = F_p \quad \text{et} \quad H^i(T_{2n+1}) = 0 \quad \text{si} \quad 0 < i < 2p - 2.$$

En appliquant la Prop. 2 à T_{2n+1}, on obtient:

$$\pi_i(T_{2n+1}) \otimes F_p = 0 \quad \text{si} \quad i < 2p - 2 \quad \text{et} \quad \pi_{2p-2}(T_{2n+1}) \otimes F_p = F_p .$$

Comme $\pi_i(T_{2n+1}) = \pi_i(X_{2n}) = \pi_{i+2n}(\mathbf{S}_{2n+1})$ si $i \geqq 2$, la proposition est démontrée.

EXEMPLE. $\pi_i(\mathbf{S}_3) \otimes F_p = 0$ pour $3 < i < 2p$: ceci signifie que le groupe $\pi_i(\mathbf{S}_3)$ est un groupe fini dont l'ordre n'est pas divisible par p. De plus $\pi_{2p}(\mathbf{S}_3) \otimes F_p$

$= F_p$: le groupe $\pi_{2p}(\mathbf{S}_3)$ est somme directe d'un groupe fini dont l'ordre n'est pas divisible par p et d'un groupe cyclique d'ordre p^k ($k \geqq 1$). Il est à noter que la méthode que nous avons suivie ne nous donne aucun renseignement sur l'entier k; pour en obtenir, il faudrait effectuer des calculs à *coefficients entiers* ce qui est incomparablement plus difficile qu'à coefficients dans un corps (nous n'avons pu les faire que pour les petites valeurs de i).

On notera que $\pi_6(\mathbf{S}_3) \otimes F_3 = F_3$; l'on savait déjà que $\pi_6(\mathbf{S}_3) \otimes F_3$ était différent de zéro: résultat obtenu par N. E. Steenrod (et non publié).

Extensions possibles des résultats précédents. Nous avons obtenu le premier groupe d'homotopie de $\mathbf{S}_m$ (m impair $\geqq 3$), après le m-ème, qui fasse intervenir un nombre premier donné. Il est possible de pousser plus loin notre méthode et d'obtenir des renseignements sur les groupes suivants. Cependant les calculs se compliquent avec une si grande rapidité qu'il n'a pas été jugé utile de les donner ici.

6. Variétés de Stiefel et sphères de dimension paire

Soit $\mathbf{W}_{2m-1}$ la variété des vecteurs unitaires tangents à la sphère $\mathbf{S}_m$ (m pair $\geqq 2$); cette variété a été étudiée par Stiefel qui a notamment calculé ses groupes d'homologie:

$$H_0(\mathbf{W}_{2m-1}) = H_{2m-1}(\mathbf{W}_{2m-1}) = Z, \qquad H_{m-1}(\mathbf{W}_{2m-1}) = Z/(2),$$

et les autres groupes d'homologie sont nuls.

Cette variété est fibrée de façon évidente, la fibre étant $\mathbf{S}_{m-1}$, la base $\mathbf{S}_m$ (il serait facile, en utilisant ce fait, de retrouver au moyen de la suite spectrale les groupes d'homologie de $\mathbf{W}_{2m-1}$). De cette fibration résulte la suite exacte suivante:

$$\cdots \longrightarrow \pi_i(\mathbf{W}_{2m-1}) \longrightarrow \pi_i(\mathbf{S}_m) \longrightarrow \pi_{i-1}(\mathbf{S}_{m-1}) \longrightarrow \pi_{i-1}(\mathbf{W}_{2m-1}) \longrightarrow \cdots .$$

Cette suite exacte a souvent été utilisée pour obtenir des renseignements sur les groupes d'homotopie de $\mathbf{W}_{2m-1}$. Ici au contraire, c'est $\pi_i(\mathbf{S}_m)$ qu'elle va nous permettre d'étudier.

Pour cela, remarquons que $\mathbf{W}_{2m-1}$ *a la même homologie que* $\mathbf{S}_{2m-1}$, *à un groupe* $Z/(2)$ *près*. Cela va nous donner:

Lemme 7. *Les groupes d'homotopie* $\pi_i(\mathbf{W}_{2m-1})$ (m *pair* $\geqq 2$) *sont finis pour tout* i, *sauf* $\pi_{2m-1}(\mathbf{W}_{2m-1})$ *qui est la somme directe de* Z *et d'un groupe fini dont l'ordre est une puissance de* 2. *En outre, pour tout* p *premier*, $p \neq 2$:

$$\pi_i(\mathbf{W}_{2m-1}) \otimes F_p = 0 \textit{ pour } 0 \leqq i < 2m - 1 \textit{ et } 2m - 1 < i < 2m + 2p - 4,$$

$$\pi_i(\mathbf{W}_{2m-1}) \otimes F_p = F_p \textit{ pour } i = 2m + 2p - 4.$$

Si $m = 2$, le revêtement universel de $\mathbf{W}_3$ est $\mathbf{S}_3$, et le lemme est un cas particulier des Prop. 3 et 4. On peut donc supposer que $m \geqq 4$, ce qui entraîne que $\mathbf{W}_{2m-1}$ est simplement connexe.

En appliquant tout d'abord la Prop. 2, on voit que l'on a:

$$\pi_i(\mathbf{W}_{2m-1}) \otimes K = 0 \quad (i < 2m - 1) \quad \text{et} \quad \pi_{2m-1}(\mathbf{W}_{2m-1}) \otimes K = K,$$

pour tout corps K de caractéristique $\neq 2$. En tenant compte du fait que les groupes d'homotopie de $\mathbf{W}_{2m-1}$ sont de type fini d'après la Prop. 1, on voit que $\pi_i(\mathbf{W}_{2m-1})$ est un groupe fini dont l'ordre est une puissance de 2 si $i < 2m - 1$, et est somme directe de Z et d'un groupe fini dont l'ordre est une puissance de 2 si $i = 2m - 1$.

Ceci étant, on n'a plus qu'à observer que les raisonnements de la Prop. 3 (resp. de la Prop. 4) ne font intervenir que l'homologie de $\mathbf{S}_{2m-1}$ à coefficients dans un corps K de caractéristique 0 (resp. p). Ils s'appliquent donc sans changement à $\mathbf{W}_{2m-1}$ si $p \neq 2$.

COROLLAIRE 1. *Pour $i < 2m - 1$, $i = 2m$ et $i = 2m + 1$, l'ordre de $\pi_i(\mathbf{W}_{2m-1})$ est une puissance de 2.*

COROLLAIRE 2. *Les groupes $\pi_i(\mathbf{S}_m)$, $i > m$ et m pair, sont des groupes finis à la seule exception de $\pi_{2m-1}(\mathbf{S}_m)$ qui est la somme directe de Z et d'un groupe fini.*

Cela résulte immédiatement du Lemme 7, de la Prop. 3, et de la suite exacte d'homotopie de $\mathbf{W}_{2m-1}$.

COROLLAIRE 3. *Les composantes p-primaires des groupes finis $\pi_i(\mathbf{S}_m)$ et $\pi_{i-1}(\mathbf{S}_{m-1})$ (m pair) sont isomorphes si $2m - 1 < i < 2m + 2p - 4$, p étant un nombre premier.*

Si $p = 2$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc $p \neq 2$. Ecrivons la suite exacte d'homotopie de $\mathbf{W}_{2m-1}$:

$$\pi_i(\mathbf{W}_{2m-1}) \rightarrow \pi_i(\mathbf{S}_m) \rightarrow \pi_{i-1}(\mathbf{S}_{m-1}) \rightarrow \pi_{i-1}(\mathbf{W}_{2m-1}).$$

Si i vérifie les inégalités de l'énoncé, tous les groupes écrits ci-dessus sont *finis*, sauf si $i = 2m$, auquel cas le dernier est somme directe de Z et d'un groupe 2-primaire (c'est-à-dire dont l'ordre est une puissance de 2). Il en résulte que les composantes p-primaires de ces 4 groupes forment encore une suite exacte, et comme, d'après le Lemme 7 les deux termes extrêmes sont nuls, le résultat est établi.

REMARQUE. Ce résultat peut être considéré comme un complément modulo p au théorème de suspension de Freudenthal qui donne un isomorphisme entre $\pi_{i-1}(\mathbf{S}_{m-1})$ et $\pi_i(\mathbf{S}_m)$ pour $i < 2m - 2$. On observera cependant: (a) que le résultat de Freudenthal ne suppose pas que m soit pair; (b) que nous ne savons pas si l'isomorphisme que nous venons de trouver est ou non défini par la suspension (bien que ce soit assez probable).

COROLLAIRE 4. *Si m est pair $\geqq 4$, la composante p-primaire de $\pi_i(\mathbf{S}_m)$ est nulle pour $i < m + 2p - 3$, et celle de $\pi_{m+2p-3}(\mathbf{S}_m)$ est un groupe cyclique d'ordre p^k, avec $k \geqq 1$.*

Si $i \leqq 2m - 1$, cela résulte du théorème de suspension de Freudenthal et de la Prop. 4. Si $i > 2m - 1$, cela résulte du Cor. 3 ci-dessus et de la Prop. 4.

Pour la commodité du lecteur, nous allons récapituler les résultats obtenus dans ce chapitre sur les $\pi_i(\mathbf{S}_n)$:

PROPOSITION 5. *Les groupes $\pi_i(\mathbf{S}_n)$ ($i > n$) sont des groupes finis à la seule exception de $\pi_{2n-1}(\mathbf{S}_n)$, n pair, qui est somme directe de Z et d'un groupe fini. La composante p-primaire de $\pi_i(\mathbf{S}_n)$ ($n \geqq 3$, p premier) est nulle si $i < n + 2p - 3$, et celle de $\pi_{n+2p-3}(\mathbf{S}_n)$ est un groupe cyclique d'ordre p^k, avec $k \geqq 1$.*

CHAPITRE VI. LES GROUPES D'EILENBERG-MACLANE

1. Introduction

Soit X un espace topologique tel que $\pi_i(X) = 0$ pour $i \neq q$ (q étant un entier $\geqq 1$); nous poserons $\Pi = \pi_q(X)$.

S. Eilenberg et S. MacLane [12] ont montré que l'homologie et la cohomologie d'un tel espace ne dépend que de l'entier q et du groupe Π. De façon plus précise, ils ont construit, pour tout couple (Π, q) où Π est abélien si $q \geqq 2$, un complexe semi-simplicial $K(\Pi, q)$ et ils ont montré qu'il est homotopiquement équivalent au complexe singulier de X [13]. En particulier, on a:

$$H_i(X, G) = H_i(K(\Pi, q), G), \qquad H^i(X, G) = H^i(K(\Pi, q), G), \qquad i \geqq 0,$$

pour tout groupe abélien G. Pour simplifier, nous écrirons par la suite $H_i(\Pi; q, G)$ au lieu de $H_i(K(\Pi, q), G)$ et de même pour $H^i(\Pi; q, G)$.

L'étude du complexe $K(\Pi, q)$ et de ses groupes d'homologie, les "groupes d'Eilenberg-MacLane" $H_i(\Pi; q, G)$ a été abordée par voie purement algébrique par Eilenberg-MacLane [14], [15]. Nous indiquerons plus loin une méthode topologique (utilisant les espaces de lacets) qui permet d'obtenir rapidement certains résultats sur ces groupes. Comme une méthode voisine de la nôtre, mais purement algébrique, vient d'être utilisée avec succès par H. Cartan qui (dans un travail non encore publié) trouve un procédé mécanique de calcul pour tout groupe d'Eilenberg-MacLane (pour $q \geqq 2$), nous n'essayerons pas ici de donner une étude systématique de ces groupes par notre méthode, et nous nous bornerons à montrer quel parti on peut tirer des calculs faits dans les chapitres précédents.

2. Résultats généraux

Soit Π un groupe *abélien*, q un entier $\geqq 1$, Y un espace topologique tel que:

$$\pi_i(Y) = 0 \qquad (i \neq q + 1), \qquad \pi_{q+1}(Y) = \Pi.$$

L'existence d'un tel espace est assurée par un théorème plus général, dû à J. H. C. Whitehead (ANN. OF MATH., *50*, 1949, p. 261–263), disant qu'il existe toujours un espace ayant des groupes d'homotopie donnés.

Soit X l'espace des lacets sur Y. On a:

$$\pi_i(X) = 0 \ (i \neq q) \quad \text{et} \quad \pi_q(X) = \Pi.$$

Il en résulte que:

$$H_i(X, G) = H_i(\Pi; q, G) \quad \text{et} \quad H_i(Y, G) = H_i(\Pi; q + 1, G), \qquad i \geqq 0,$$

pour tout groupe abélien de coefficients G.

On peut donc appliquer la suite spectrale des espaces de lacets (Chapitre IV, n° 5) et l'on obtient:

PROPOSITION 1. *Il existe une suite spectrale d'homologie dont le terme $E_2^{r,s}$ est isomorphe à $H_r(\Pi; q + 1, H_s(\Pi; q, G))$ et dont le terme E_∞ est nul en toute dimension > 0.*

(Une suite duale existe en cohomologie.)

Ce résultat permet une étude des groupes d'Eilenberg-MacLane *par récurrence sur l'entier* q, à partir des groupes $H_i(\Pi; 1, G)$ supposés connus (et qui, en fait, peuvent être calculés par d'autres méthodes, au moins si Π est abélien).

L'exemple le plus simple d'application de cette méthode est sans doute le calcul de l'algèbre de cohomologie $H^*(Z; 2, Z)$: les groupes de cohomologie $H^i(Z; 1, Z)$ étant nuls si $i \geqq 2$, et égaux à Z si $i = 0, 1$, on voit aisément que cela entraîne que $H^*(Z; 2, Z)$ est *une algèbre de polynomes à un générateur de degré* 2. Cette méthode ne diffère d'ailleurs pas essentiellement de la méthode classique utilisant l'espace projectif complexe.

COROLLAIRE 1. *Si* Π *est de type fini, il en est de même de* $H_i(\Pi; q, Z)$ *pour tout* i *et tout* q.

Pour $q = 1$, ce résultat est classique (il suffit de le vérifier pour $\Pi = Z$ et $\Pi = Z/(m)$). A partir de là, on raisonne par récurrence en utilisant la Prop. 1 du Chapitre III.

COROLLAIRE 2. *Si* Π *est fini et si* k *est un corps tel que* $\Pi \otimes k = 0$, *alors* $H_i(\Pi; q, k) = 0$ *pour tout* q *et tout* $i > 0$. *En particulier, les groupes* $H_i(\Pi; q, Z)$ *sont finis lorsque* Π *est fini et que* $i > 0$.

Pour $q = 1$, ce résultat est classique, et peut être considéré comme une généralisation naturelle du théorème de Maschke. A partir de $q = 1$, on raisonne par récurrence sur q, en utilisant la Prop. 10 du Chapitre IV.

Comme dans tout espace fibré d'homologie triviale, on peut définir la *suspension* $\Sigma: H_i(\Pi; q, G) \to H_{i+1}(\Pi; q + 1, G)$. En utilisant une formule analogue à celle du Chap. IV, n°5 (mais valable pour les simplexes et non pour les cubes), on pourrait vérifier que cette suspension coincide avec celle introduite par Eilenberg-MacLane [14]. Si l'on observe que $H_i(\Pi; q, G) = 0$ pour $0 < i < q$, on voit que l'on peut appliquer la Prop. 10 du Chap. IV, et l'on obtient ainsi:

PROPOSITION 2. (Th. de suspension d'Eilenberg-MacLane.) *La suspension* Σ *applique* $H_i(\Pi; q, Z)$ *sur* $H_{i+1}(\Pi; q + 1, Z)$ *pour* $0 < i \leqq 2q$; *c'est un isomorphisme si* $0 < i \leqq 2q - 1$.

3. Le théorème de Hopf

Gardons les notations du n° précédent. Nous avons vu que les groupes d'homologie et de cohomologie de $K(\Pi; q)$ étaient ceux de l'espace X des lacets sur un certain espace Y. Mais tout espace de lacets est un H-espace (Chap. IV, Prop. 1), donc son algèbre de cohomologie possède un H-homomorphisme si elle est de type fini en toute dimension (*ibid.*, Prop. 2); elle vérifie donc le théorème de Hopf. On a donc:

PROPOSITION 3. *Soit* Π *un groupe abélien de type fini,* q *un entier* $\geqq 1$, k *un corps commutatif. L'algèbre de cohomologie* $H^*(\Pi; q, k)$ *vérifie le théorème de Hopf, tel qu'il est énoncé au* Chap. IV, n°2.

(En particulier, si k est de caractéristique nulle, c'est le produit tensoriel d'une algèbre extérieure engendrée par des éléments de degré impair, et d'une algèbre de polynomes engendrée par des éléments de degré pair.)

On notera que le résultat précédent est en particulier valable lorsque $q = 1$.

Donnons à titre d'exemple le calcul de $H^*(Z; q, K)$, le corps K étant de caractéristique nulle:

Proposition 4. *Si K est un corps de caractéristique nulle, l'algèbre de cohomologie $H^*(Z; q, K)$ où q est pair (resp. impair) est une algèbre de polynomes (resp. une algèbre extérieure) engendrée par un élément de degré q.*

La proposition est vraie si $q = 1$ (elle revient à déterminer l'homologie d'un cercle). Elle sera donc démontrée par récurrence sur l'entier q si nous prouvons les deux lemmes suivants:

Lemme 1. *Soit X un espace tel que $\pi_0(X) = \pi_1(X) = 0$, Y l'espace des lacets sur X, K un corps. On suppose que $H^*(Y, K)$ est isomorphe à une algèbre extérieure engendrée par un élément de degré q (q impair). Alors $H^*(X, K)$ est isomorphe à une algèbre de polynomes engendrée par un élément de degré $q + 1$.*

Lemme 2. *Soit X un espace tel que $\pi_0(X) = \pi_1(X) = 0$, Y l'espace des lacets sur X, K un corps de caractéristique nulle. On suppose que $H^*(Y, K)$ est isomorphe à une algèbre de polynomes engendrée par un élément de degré q (q pair). Alors $H^*(X, K)$ est isomorphe à une algèbre extérieure engendrée par un élément de degré $q + 1$.*

Démonstration du Lemme 1.

La fibre ayant la cohomologie d'une sphère, on peut appliquer la suite exacte de Gysin (Chap. III, Prop. 6). On a donc une suite exacte:

$$H^i(E, K) \to H^{i-q}(X, K) \xrightarrow{h} H^{i+1}(X, K) \to H^{i+1}(E, K),$$

où l'homomorphisme h est la multiplication par un élément $\Omega \in H^{q+1}(X, K)$. Puisque $H^i(E, K) = 0$ si $i > 0$, h doit être un *isomorphisme sur*, et le lemme en résulte immédiatement.
(On observera que ce résultat est un cas particulier d'un th. de A. Borel déjà cité.)

Démonstration du Lemme 2.

Soit E_r la suite spectrale de l'espace fibré des chemins d'origine fixée et tracés dans X. On a: $E_2 = H^*(X) \otimes H^*(Y)$. D'après la Prop. 10 du Chap. IV, $H^i(X, K) = 0$ pour $0 < i < q + 1$, et $H^{q+1}(X, K)$ admet pour base un élément u tel que $d_{q+1}v = u$, v désignant un élément de base de $H^q(Y, K)$.

Désignons alors par U le sous-espace de $E_{q+1} = E_2$ formé des éléments de degré-base $\leqq q + 1$. L'espace U admet pour base homogène les éléments v^k et $u \otimes v^k$ ($k = 0, 1, \cdots$), et la différentielle d_{q+1} y est donnée par les formules:

$$d_{q+1}(v^k) = k \cdot u \otimes v^{k-1}, \qquad d_{q+1}(u \otimes v^k) = 0.$$

Comme K est de caractéristique nulle, il résulte de ces formules que tout cocycle de U de dimension >0 est un cobord, et donc que l'image canonique U_r de U dans les termes E_r ($r > q + 1$) est nulle en toute dimension >0.

Nous allons maintenant prouver que $H^i(X, K) = 0$ pour $i > q + 1$, ce qui achèvera la démonstration. Pour cela, raisonnons par l'absurde, et soit $w \in H^i(X, K)$; $w \neq 0$, $i \geqq q + 2$; on peut en outre supposer que w est de degré minimum parmi tous ceux jouissant de cette propriété. Puisque w est un élément basique, c'est un cocycle pour toutes les différentielles d_r. En outre, je dis que ce n'est pas un cobord. En effet, ce n'est tout d'abord pas un cobord pour d_{q+1}, car ce ne pourrait être que le cobord de $u \otimes v^k$ qui est un cocycle, on l'a vu; d'autre part, ce n'est pas un cobord pour d_r $(r > q + 1)$, car ce serait le cobord d'un élément de U_r, qui est nul en toute dimension >0, on l'a vu. Il suit de là que w définit un élément non nul de E_∞, ce qui est absurde et achève la démonstration.

Appendice

Sur l'homologie de certains revêtements

(Ajouté le 25 Août 1951)

Au n° 6 du Chapitre I nous avons rappelé sans démonstration un résultat général sur l'homologie des revêtements (Proposition 4). Comme nous n'en avons utilisé par la suite que des cas très particuliers (essentiellement les deux corollaires à la proposition en question), il sera peut-être commode pour le lecteur de trouver ici des démonstrations directes et élémentaires de ces cas particuliers.

Soit Π un groupe opérant sans point fixe sur un espace T, et soit $X = T/\Pi$; T est donc un revêtement galoisien de X; la projection $T \to X$ sera désignée par p. Au sujet de Π, T, X nous faisons les deux hypothèses suivantes (qui sont vérifiées dans les conditions, plus particulières, du n° 6 du Chapitre I):

(1) *Pour tout simplexe singulier s de l'espace X, il existe un simplexe singulier s' de l'espace T tel que $s = p \circ s'$.*

(2) *Si deux simplexes singuliers s', s'' de l'espace T sont tels que $p \circ s' = p \circ s''$, il existe $\sigma \in \Pi$ tel que $\sigma(s') = s''$.*

Rappelons d'autre part quelques définitions concernant les groupes abéliens à opérateurs:

Si A est un groupe abélien sur lequel opère le groupe Π (à gauche, pour fixer les idées) on désigne par A^Π le sous-groupe de A formé des $a \in A$ tels que $\sigma(a) = a$ pour tout $\sigma \in \Pi$, et par A_Π le quotient de A par le sous-groupe engendré par les $a - \sigma(a)$ où a parcourt A et σ parcourt Π.

Le groupe à opérateurs A est dit Π-libre s'il existe une famille $\{a_\iota\}$ $(\iota \in I)$ d'éléments de A telle que les $\sigma(a_\iota)$ $(\sigma \in \Pi, \iota \in I)$ forment une base du groupe abélien A.

Ces définitions rappelées, considérons les complexes singuliers de T et de X, $K(T)$ et $K(X)$ respectivement. Le groupe Π est un groupe d'automorphismes du complexe $K(T)$, et $K(T)$ est Π-*libre* puisque Π opère sans point fixe sur T. L'application $p: T \to X$ définit un homomorphisme de $K(T)$ dans $K(X)$ qui, par passage au quotient, définit un homomorphisme: $K(T)_\Pi \rightarrow K(X)$. La condition (1) entraîne que ce dernier homomorphisme est *sur,* la condition (2) qu'il est *biunivoque.* Ceci nous permet d'*identifier* $K(T)_\Pi$ *à* $K(X)$.

On est ainsi amené à étudier la situation purement algébrique suivante: on a un complexe C ($K(T)$, dans ce qui précède) sur lequel opère un groupe Π; C est Π-libre; on cherche les relations qui existent entre les groupes d'homologie de C et ceux de C_Π. Donnons ces relations dans quelques cas particuliers:

PROPOSITION 1. *Supposons que* $\Pi = Z$, *groupe additif des entiers, et soit* G *un groupe abélien. On a alors la suite exacte*:

$$0 \rightarrow H_i(C, G)_\Pi \rightarrow H_i(C_\Pi, G) \rightarrow H_{i-1}(C, G)^\Pi \rightarrow 0.$$

(En particulier, revenant au cas topologique et supposant en outre que Π opère trivialement sur $H_i(T, G)$ pour tout i, on trouve la suite exacte: $0 \rightarrow H_i(T, G) \rightarrow H_i(X, G) \rightarrow H_{i-1}(T, G) \rightarrow 0$, résultat qui contient le Cor. 1 à la Prop. 4 du Chap. I).

DÉMONSTRATION. Soit σ un générateur de Π. Considérons la suite:

$$0 \rightarrow C \xrightarrow{1 - \sigma} C \rightarrow C_\Pi \rightarrow 0,$$

où $C \rightarrow C$ est l'endomorphisme $1 - \sigma$, et $C \rightarrow C_\Pi$ l'application canonique. Je dis que cette suite est *exacte.* Il y a deux choses à vérifier:

a) que $1 - \sigma$ est biunivoque. En effet, si $c = \sigma(c)$, $c \in C$, on a $c \in C^\Pi$. Mais, puisque C est Π-libre et que Π a une infinité d'éléments, on a $C^\Pi = 0$.

b) que tout élément de la forme $c - \sigma^n(c)$ $(n \in Z)$ peut se mettre sous la forme $c' - \sigma(c')$. Cela résulte des identités:

$$1 - \sigma^n = (1 - \sigma)(1 + \sigma + \sigma^2 + \cdots + \sigma^{n-1}) \qquad \text{si } n \geqq 1,$$

$$1 - \sigma^{-n} = (1 - \sigma)(1 + \sigma^{-1} + \sigma^{-2} + \cdots + \sigma^{-n-1}) \qquad \text{si } n \geqq 0.$$

Formons le produit tensoriel de cette suite exacte avec le groupe abélien G; puisque C est Π-libre, C et C_Π sont des groupes abéliens libres, et la suite obtenue sera encore une suite exacte:

$$0 \rightarrow C \otimes G \xrightarrow{1 - \sigma} C \otimes G \rightarrow C_\Pi \otimes G \rightarrow 0.$$

Par passage à l'homologie, cela donne la suite exacte:

$$H_i(C, G) \xrightarrow{1 - \sigma} H_i(C, G) \rightarrow H_i(C_\Pi, G) \rightarrow H_{i-1}(C, G) \xrightarrow{1 - \sigma} H_{i-1}(C, G)$$

d'où la suite exacte cherchée:

$$0 \rightarrow H_i(C, G)_\Pi \rightarrow H_i(C_\Pi, G) \rightarrow H_{i-1}(C, G)^\Pi \rightarrow 0.$$

PROPOSITION 2. *Supposons que* Π *soit un groupe fini d'ordre* n *et soit* G *un groupe abélien où l'équation* $n \cdot x = y$ *ait, pour tout* y, *une solution et une seule. Alors* $H_i(C_\Pi, G) = H_i(C, G)_\Pi$.

(En particulier, revenant au cas topologique et supposant en outre que Π

opère trivialement sur $H_i(T, G)$, on voit que $H_i(T, G) = H_i(X, G)$, résultat qui contient le Cor. 2 à la Prop. 4 du Chap. I).

DÉMONSTRATION. Nous noterons $1/n$ l'automorphisme de G qui transforme un élément y en l'élément x tel que $n \cdot x = y$; cet automorphisme se prolonge à $C \otimes G$. Ceci permet de définir un endomorphisme P de $C \otimes G$ par la formule:

$$P = 1/n \sum_{\sigma \epsilon \Pi} \sigma.$$

On vérifie tout de suite que $P\sigma = \sigma P = P$ pour tout $\sigma \epsilon \Pi$, et que $P^2 = P$; P est un *projecteur*, visiblement nul pour les éléments de la forme $c - \sigma(c)$, $\sigma \epsilon \Pi$. Réciproquement, si $P(c) = 0$, on a:

$$c = \sum_{\sigma \epsilon \Pi} (c/n - \sigma(c/n)),$$

ce qui montre que le noyau de P coincide avec le sous-groupe de $C \otimes G$ engendré par les $c - \sigma(c)$. Il suit de là que $(C \otimes G)_\Pi$, d'ailleurs isomorphe à $C_\Pi \otimes G$, s'identifie au quotient de $C \otimes G$ par le noyau du projecteur P. Passant à l'homologie on voit que $H_i(C_\Pi, G)$ s'identifie au quotient de $H_i(C, G)$ par le noyau du projecteur défini par P, c'est-à-dire, d'après la formule ci-dessus, à $H_i(C, G)_\Pi$.

Donnons enfin, uniquement sous forme topologique pour abréger, un résultat implicitement utilisé dans la démonstration du Lemme 7 du Chapitre V:

PROPOSITION 3. *Supposons que $\Pi = Z + N$, où N est un groupe fini d'ordre n, et soit G un groupe abélien où l'équation $n \cdot x = y$ ait, pour tout y, une solution et une seule. Supposons en outre que Π opère trivialement sur $H_i(T, G)$ pour tout i. On a alors la suite exacte:*

$$0 \to H_i(T, G) \to H_i(X, G) \to H_{i-1}(T, G) \to 0.$$

(Dans l'application au lemme en question, N est un groupe abélien d'ordre une puissance de 2, et G un corps de caractéristique $\neq 2$).

DÉMONSTRATION. Soit $Y = T/N$; d'après la Prop. 2 ci-dessus, la projection $T \to Y$ définit un isomorphisme de $H_i(T, G)$ sur $H_i(Y, G)$. D'autre part, $\Pi/N = Z$ opère sans point fixe sur Y, et $Y/Z = X$. Puisque Π opere trivialement sur $H_i(T, G)$, Π/N opère trivialement sur $H_i(Y, G)$ et l'application de la Prop. 1 ci-dessus donne alors la suite exacte cherchée.

PARIS

BIBLIOGRAPHIE

[1]. A. BOREL. *Impossibilité de fibrer une sphère par un produit de sphères.* C. R. Acad. Sci. Paris, *231*, 1950, p. 943–945.

[2]. A. BOREL et J-P. SERRE. *Impossibilité de fibrer un espace euclidien par des fibres compactes.* C. R. Acad. Sci. Paris, *230*, 1950, p. 2258–2260.

[3]. H. CARTAN. *Sur la cohomologie des espaces où opère un groupe.* C. R. Acad. Sci. Paris, *226*, 1948, p. 148–150 et 303–305.

[4]. H. CARTAN. *Séminaire de Topologie algébrique ENS*, I, 1948–1949.

[5]. H. CARTAN. Idem, II, 1949–1950.

[6]. H. CARTAN. Idem, III, 1950–1951.

[7]. H. CARTAN et S. EILENBERG. *Satellites des foncteurs de modules* (à paraître).

[8]. H. Cartan et J. Leray. *Relations entre anneaux de cohomologie et groupe de Poincaré*. Colloque Top. Alg. Paris 1947, p. 83–85.

[9]. S. S. Chern and E. Spanier. *The homology structure of sphere bundles*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., *36*, 1950, p. 248–255.

[10]. S. Eilenberg. *Singular homology theory*. Ann. of Math., *45*, 1944, p. 407–447.

[11]. S. Eilenberg. *Topological methods in abstract algebra. Cohomology theory of groups*. Bull. Amer. Math. Soc., *55*, 1949, p. 3–27.

[12]. S. Eilenberg and S. MacLane. *Relations between homology and homotopy groups of spaces*. Ann. of Math., *46*, 1945, p. 480–509.

[13]. S. Eilenberg and S. MacLane. Idem, II, Ann. of Math., *51*, 1950, p. 514–533.

[14]. S. Eilenberg and S. MacLane. *Cohomology theory of abelian groups and homotopy theory*. I. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., *36*, 1950, p. 443–447.

[15]. S. Eilenberg and S. MacLane. Idem, II, p. 657–663.

[16]. W. Gysin. *Zur Homologie Theorie des Abbildungen und Faserungen von Mannigfaltigkeiten*. Comment. Math. Helv., *14*, 1941, p. 61–121.

[17]. H. Hopf und W. Rinow. *Ueber den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche*. Comment. Math. Helv., *3*, 1931, p. 209–225.

[18]. W. Hurewicz. *Beiträge zur Topologie der Deformationen*. Neder. Akad. Wetensch, I, *38*, 1935, p. 112–119; II, ibid., p. 521–528; III, ibid., *39*, 1936, p. 117–126; IV, ibid., p. 215–224.

[19]. J-L. Koszul. *Sur les opérateurs de dérivation dans un anneau*. C. R. Acad. Sci. Paris, *225*, 1947, p. 217–219.

[20]. J-L. Koszul. *Homologie et cohomologie des algèbres de Lie*. Bulletin Soc. Math. France, *78*, 1950, p. 65–127.

[21]. J. Leray. *Sur la forme des espaces topologiques et sur les points fixes des représentations*. J. Math. Pures Appl., *24*, 1945, p. 95–248.

[22]. J. Leray. *Structure de l'anneau d'homologie d'une représentation*. C. R. Acad. Sci. Paris, *222*, 1946, p. 1419–1422.

[23]. J. Leray. *L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue*. J. Math. Pures Appl., *29*, 1950, p. 1–139.

[24]. J. Leray. *L'homologie d'un espace fibré dont la fibre est connexe*. J. Math. Pures Appl., *29*, 1950, p. 169–213.

[25]. M. Morse. The Calculus of variations in the large. Colloquium *18*, 1934.

[26]. M. Morse. Functional Topology and abstract variational theory. Mémorial des Sc. Maths., *92*, 1938.

[27]. H. Seifert und W. Threlfall. Variationsrechnung im Grossen (theorie von Marston Morse). Teubner 1939.

[28]. J-P. Serre. *Homologie singulière des espaces fibrés*. C. R. Acad. Sci. Paris, I, *231*, 1950, p. 1408–1410; II, ibid., *232*, 1951, p. 31–33; III, ibid., p. 142–144.

[29]. A. Shapiro. *Cohomologie dans les espaces fibrés*. C. R. Acad. Sci. Paris, *231*, 1950, p. 206–207.

[30]. N. E. Steenrod. *Homology with local coefficients*. Ann. of Math., *44*, 1945, p. 610–627.

[31]. R. Thom. *Classes caractéristiques et i-carrés*. C. R. Acad. Sci. Paris, *230*, 1950, p. 427–429.

[32]. H. C. Wang. *The homology groups of the fibre-bundles over a sphere*. Duke Math. J., *16*, 1949, p. 33–38.