ANNALS OF MATHEMATICS
Vol. 58, No. 2, September, 1953
*Printed in U.S.A.*

# GROUPES D'HOMOTOPIE ET CLASSES DE GROUPES ABÉLIENS

PAR JEAN-PIERRE SERRE

(Received June 23, 1952)

## Introduction

Rappelons un théorème classique d'Hurewicz: *Soit $X$ un espace tel que $\pi_i(X) = 0$ pour $i < n$; on a alors $H_i(X) = 0$ pour $0 < i < n$, et $\pi_n(X)$ est isomorphe à $H_n(X)$.*

Nous avons indiqué dans un travail antérieur [8] diverses généralisations de ce théorème. On peut les formuler de la manière suivante: si l'on ne suppose plus que $\pi_i(X)$ est nul pour $i < n$, mais seulement que c'est un groupe de type fini (resp. un groupe fini), on trouve que $H_i(X)$ est un groupe de type fini (resp. un groupe fini) pour $0 < i < n$, et que les groupes $\pi_n(X)$ et $H_n(X)$ sont isomorphes "modulo" un groupe de type fini (resp. un groupe fini).

Nous reprenons ici la question, et nous montrons que le cadre naturel de ces diverses généralisations est la notion de *classe* de groupes abéliens.

Une classe $\mathcal{C}$ est, par définition, une collection de groupes abéliens qui vérifie certaines conditions algébriques simples. Ces conditions expriment essentiellement que $\mathcal{C}$ est *stable* vis à vis des opérations de l'algèbre élémentaire: sous-groupe, groupe quotient, extension. La donnée d'une classe $\mathcal{C}$ permet d'introduire des "$\mathcal{C}$-notions" où l'on "néglige" les groupes de la classe $\mathcal{C}$ (par exemple, un $\mathcal{C}$-isomorphisme est un homomorphisme dont le noyau appartient à $\mathcal{C}$). L'étude des classes et notamment de certains axiomes supplémentaires, nécessaires pour les applications ultérieures, fait l'objet du Chapitre I.

Dans le langage de la $\mathcal{C}$-théorie, notre généralisation du théorème d'Hurewicz s'énonce ainsi (Chapitre III, Théorème 1):

*Si $\pi_0(X) = \pi_1(X) = 0$, et si $\pi_i(X)$ appartient à $\mathcal{C}$ pour $i < n$, alors $H_i(X)$ appartientà $\mathcal{C}$ pour $0 < i < n$, et l'homomorphisme $\pi_n(X) \rightarrow H_n(X)$ est un $\mathcal{C}$-isomorphisme sur.*

(Pour retrouver l'énoncé classique, prendre pour $\mathcal{C}$ la classe des groupes à un seul élément).

On a également un *théorème d'Hurewicz relatif* mod $\mathcal{C}$ (il faut, à vrai dire, imposer à $\mathcal{C}$ des conditions un peu plus restrictives que pour le théorème absolu). On tire de là un *théorème de J. H. C. Whitehead* mod $\mathcal{C}$ (Chapitre III, Théorème 3) dont je me bornerai à énoncer ici un cas particulier:

*Soient $A$ et $B$ deux espaces connexes et simplement connexes par arcs, $f: A \rightarrow B$ une application continue qui applique $\pi_2(A)$ sur $\pi_2(B)$. Les propriétés suivantes sont alors équivalentes:*

(a) *$f_* : H_i(A) \rightarrow H_i(B)$ est un $\mathcal{C}$-isomorphisme sur pour tout $i$.*

(b) *$f_0 : \pi_i(A) \rightarrow \pi_i(B)$ est un $\mathcal{C}$-isomorphisme sur pour tout $i$.*

Les démonstrations de ces théorèmes se font de la manière suivante: on établit d'abord (Chapitre II) certains résultats auxiliaires sur les espaces fibrés, et on tire de là le théorème d'Hurewicz par la méthode de [4], ou par celle de [8], Chapitre V. Le théorème d'Hurewicz relatif (et celui de J. H. C. Whitehead qui en découle) se ramènent au précédent par l'intermédiaire d'espaces de lacets convenablement choisis.

Les résultats généraux qui précèdent font l'objet des Chapitres I, II et III, alors que les Chapitres IV et V sont consacrés aux applications. Dans ces applications le théorème de J. H. C. Whitehead cité plus haut joue un rôle important, notamment lorsque $\mathcal{C}$ est la classe des groupes finis d'ordre divisible seulement par des nombres premiers donnés. Il y a là la possibilité d'une étude *locale* (au sens arithmétique!) des groupes d'homotopie; citons par exemple la Proposition 3 du Chapitre IV:

*Le groupe $\pi_i(\mathrm{S}_n)$, $n$ pair, est $\mathcal{C}$-isomorphe à la somme directe de $\pi_{i-1}(\mathrm{S}_{n-1})$ et de $\pi_i(\mathrm{S}_{2n-1})$, $\mathcal{C}$ désignant la classe des groupes finis d'ordre une puissance de* 2.

Le Chapitre IV contient d'autres résultats de ce genre, relatifs à la suspension de Freudenthal et au calcul des $p$-composants des groupes $\pi_i(\mathrm{S}_n)$.

Le Chapitre V est consacré à la comparaison des espaces (et en particulier des groupes de Lie) avec les sphères. Nous introduisons notamment la notion de nombre premier *régulier* pour un groupe de Lie donné $G$. Grosso modo, $p$ est dit régulier pour $G$ si $G$ est équivalent, "vis à vis de $p$", à un produit de sphères. Lorsque $G$ est un groupe simple classique (compact et simplement connexe), de dimension $n$ et de rang $l$, nous déterminons tous les nombres premiers $p$ réguliers pour $G$: ce sont ceux qui sont supérieurs à $n/l - 1$.

## Chapitre I. La notion de classe

### Notations

Soient $A$ et $B$ deux groupes abéliens, $f$: $A \to B$ un homomorphisme; nous noterons par Im.$f$ l'*image* de $f$, par Ker.$f$ le *noyau* de $f$, et par Coker.$f$ le *conoyau* de $f$ (c'est-à-dire le quotient $B/\mathrm{Im}.f$). La suite:

$$0 \to \mathrm{Ker}.f \to A \xrightarrow{f} B \to \mathrm{Coker}.f \to 0$$

est donc *exacte*.

### 1. Définition des classes

Une collection *non vide* $\mathcal{C}$ de groupes abéliens est dite une *classe* si elle vérifie l'axiome suivant:

(I). *Si, dans une suite exacte $L \to M \to N$, les groupes $L$ et $N$ appartiennent à $\mathcal{C}$, alors $M$ appartient à $\mathcal{C}$.*

On peut mettre cet axiome sous une forme légèrement différente:

Proposition 1. *Pour que l'axiome* (I) *soit satisfait, il faut et il suffit que les trois conditions suivantes soient remplies:*

(a) *Tout groupe réduit à l'élément neutre est dans $\mathcal{C}$.*

(b) *Tout groupe isomorphe à un sous-groupe ou à un groupe quotient d'un groupe de $\mathcal{C}$ est dans $\mathcal{C}$.*

(c) *Toute extension de deux groupes de $\mathcal{C}$ est dans $\mathcal{C}$.*

*Nécessité.* Puisque $\mathcal{C}$ est non vide, il existe un $M$ tel que $M \in \mathcal{C}$; soit $A$ un groupe réduit à l'élément neutre; la suite $M \to A \to M$ étant exacte, l'axiome (I) entraîne que $A \in \mathcal{C}$, et (a) est vérifié. La propriété (c) est un cas particulier de (I); il en est de même de (b), compte tenu de (a).

*Suffisance.* Soit $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ une suite exacte, avec $L \in \mathcal{C}$, $N \in \mathcal{C}$; $M$ est donc une extension de Im.$f$ par Im.$g$; puisque Im.$f$ est isomorphe à un groupe quotient de $L$, (b) entraîne que Im.$f \in \mathcal{C}$; de même pour Im.$g$; la propriété (c) entraîne donc $M \in \mathcal{C}$, ce qui montre que $\mathcal{C}$ vérifie (I). D'autre part $\mathcal{C}$ n'est pas vide, à cause de (a); $\mathcal{C}$ est bien une classe.

Remarques. (1) Nous donnerons des exemples de classes au n° 6 et au n° 7; pour l'instant, signalons simplement la classe des groupes réduits à l'élément neutre, et la classe de tous les groupes.

(2). Il résulte de (b) que *tout groupe isomorphe à un groupe de $\mathcal{C}$ appartient à* $\mathcal{C}$; ceci montre évidemment que $\mathcal{C}$ ne peut pas être un "ensemble", et on ne peut donc pas appliquer à la relation $A \in \mathcal{C}$ toutes les propriétés de la relation d'appartenance. Par exemple, il serait dépourvu de sens d'écrire $\Pi_{A \in \mathcal{C}} A$.

## 2. Les $\mathcal{C}$-notions

Dans la suite de ce travail, les groupes appartenant à une classe donnée $\mathcal{C}$ seront, en un certain sens, négligés. Ceci est précisé par les définitions suivantes:

Un groupe $A$ est $\mathcal{C}$-*nul* si $A \in \mathcal{C}$.

Un homomorphisme $f: A \to B$ est $\mathcal{C}$-*biunivoque* si Ker.$f \in \mathcal{C}$; il est $\mathcal{C}$-*sur* si Coker.$f \in \mathcal{C}$.

Un homomorphisme qui est à la fois $\mathcal{C}$-biunivoque et $\mathcal{C}$-sur est un $\mathcal{C}$-*isomorphisme sur*.

Deux groupes $A$ et $B$ sont $\mathcal{C}$-*isomorphes* s'il existe un groupe $L$ et deux homomorphismes $f: L \to A$, $g: L \to B$ qui soient tous deux des $\mathcal{C}$-isomorphismes sur. Cette notion est *transitive*, car si $h: M \to B$, et $k: M \to C$ sont deux $\mathcal{C}$-isomorphismes sur, en prenant pour $N$ le sous-groupe de la somme directe $L + M$ formé des $(l, m)$ tels que $g(l) = h(m)$, et en posant $r(l, m) = f(l)$, $s(l, m) = k(m)$, on obtient deux homomorphismes $r: N \to A$, $s: N \to C$ qui sont des $\mathcal{C}$-isomorphismes sur.

Les notions précédentes ont les mêmes propriétés formelles que les notions classiques (auxquelles elles se réduisent lorsque la classe $\mathcal{C}$ est formée des groupes à un seul élément); par exemple, soient $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ deux homomorphismes; on vérifie alors sans difficulté que:

2.1. *Si $f$ et $g$ sont $\mathcal{C}$-biunivoques, $g \circ f$ est $\mathcal{C}$-biunivoque.*

2.2. *Si $f$ et $g$ sont $\mathcal{C}$-sur, $g \circ f$ est $\mathcal{C}$-sur.*

2.3. *Si $g \circ f$ est $\mathcal{C}$-biunivoque, $f$ est $\mathcal{C}$-biunivoque.*

2.4. *Si $g \circ f$ est $\mathcal{C}$-sur, $g$ est $\mathcal{C}$-sur.*

2.5. *Si $g \circ f$ est $\mathcal{C}$-biunivoque et si $f$ est $\mathcal{C}$-sur, $g$ est $\mathcal{C}$-biunivoque.*

2.6. *Si $g \circ f$ est $\mathcal{C}$-sur et si $g$ est $\mathcal{C}$-biunivoque, $f$ est $\mathcal{C}$-sur.*

On vérifie également que le "lemme des cinq" reste valable pour les $\mathcal{C}$-notions. De façon précise, si l'on a deux suites exactes à 5 termes, et 5 homomorphismes des groupes de la première suite dans les groupes correspondants de la seconde (vérifiant les relations de commutation nécessaires), et si les 4 homomorphismes "extrêmes" sont des $\mathcal{C}$-isomorphismes sur, alors l'homomorphisme médian est aussi un $\mathcal{C}$-isomorphisme sur.

On peut donner de nombreux autres résultats de ce genre[1]; signalons seulement le suivant, qui nous sera utile dans la suite:

PROPOSITION 2. *Soient $\mathcal{C}$ une classe, $A_1 \xrightarrow{p_1} A_2 \xrightarrow{p_2} A_3 \xrightarrow{p_3} A_4 \xrightarrow{p_4} A_5$ une suite exacte, $k: A_2 \to A_1$ et $k': A_5 \to A_4$ des homomorphismes tels que $p_1 \circ k$ et $p_4 \circ k'$ soient des $\mathcal{C}$-automorphismes de $A_2$ et de $A_5$ respectivement. Soit $(p_3, k')$ l'homomorphisme de la somme directe $A_3 + A_5$ dans $A_4$ qui coincide sur le premier facteur avec $p_3$, sur le second avec $k'$. L'homomorphisme $(p_3, k')$ est un $\mathcal{C}$-isomorphisme sur.*

(Dans cet énoncé, le terme "$\mathcal{C}$-automorphisme" désigne un endomorphisme qui est un $\mathcal{C}$-isomorphisme sur).

Indiquons, à titre d'exemple, la démonstration de cette Proposition:

Tout d'abord, il résulte de 2.4 que $p_1$ et $p_4$ sont $\mathcal{C}$-sur; puisque la suite est exacte, Ker.$p_3$ est isomorphe à Coker.$p_1$, et $p_3$ est donc $\mathcal{C}$-biunivoque.

Soit alors $N$ le noyau de $(p_3, k')$, et $(a_3, a_5) \in N$; on a $p_3(a_3) + k'(a_5) = 0$, d'où $p_4 \circ k'(a_5) = 0$, et $a_5 \in$ Ker.$(p_4 \circ k')$. Si $a_5 = 0$, on a $a_3 \in$ Ker.$p_3$; il suit de là que l'on a une suite exacte: Ker.$p_3 \to N \to$ Ker.$(p_4 \circ k')$, et comme les deux groupes extrêmes sont dans $\mathcal{C}$, on a $N \in \mathcal{C}$, et $(p_3, k')$ est $\mathcal{C}$-biunivoque.

Désignons maintenant par $q$ le composé $A_4 \xrightarrow{p_4} A_5 \to$ Coker.$(p_4 \circ k')$, et considérons la suite: $A_3 + A_5 \xrightarrow{(p_3, k')} A_4 \xrightarrow{q}$ Coker.$(p_4 \circ k')$. Le composé de ces deux homomorphismes est 0, et, réciproquement, si $q(a_4) = 0$, cela signifie qu'il y a $x_5 \in A_5$ tel que $p_4 \circ k'(x_5) = p_4(a_4)$, ou encore $p_4(a_4 - k'(x_5)) = 0$, ce qui entraîne l'existence de $x_3 \in A_3$ tel que $a_4 - k'(x_5) = p_3(x_3)$; $a_4$ est donc dans Im.$(p_3, k')$ et la suite écrite plus haut est exacte. Comme Coker.$(p_4 \circ k') \in \mathcal{C}$ par hypothèse, $(p_3, k')$ est $\mathcal{C}$-sur, ce qui achève la démonstration.

## 3. Le produit de torsion

H. Cartan et S. Eilenberg ont introduit dans [3] une nouvelle notion, celle du *produit de torsion* de deux groupes abéliens (ou plus généralement de deux modules); leur livre n'étant pas encore paru, nous allons rappeler la définition et les principales propriétés de cette opération.

[1] Signalons deux autres $\mathcal{C}$-notions:

(a) La $\mathcal{C}$-*égalité* de deux sous-groupes $A$ et $B$ d'un même groupe $C$: elle a lieu lorsque les homomorphismes $A \cap B \to A$ et $A \cap B \to B$ sont tous deux des $\mathcal{C}$-isomorphismes sur. Cette notion permet de définir les *suites* $\mathcal{C}$-*exactes*, etc.

(b) Les $\mathcal{C}$-*homomorphismes*: un $\mathcal{C}$-homomorphisme de $A$ dans $B$ est défini par son graphe $F$, sous-groupe de $A \times B$ dont la projection dans $A$ est $\mathcal{C}$-égale à $A$, et qui vérifie $F \cap (\{0\} \times B) \in \mathcal{C}$.

Soient $A$ et $B$ deux groupes abéliens; écrivons $B$ sous la forme $B = L/R$, où $L$ est *libre*, et soit $C$ le noyau de l'homomorphisme $A \otimes R \to A \otimes L$. On démontre que $C$ ne dépend que de $A$ et de $B$, c'est par définition le *produit de torsion* de $A$ et de $B$; on le note $\operatorname{Tor}(A, B)$ ou encore $A * B$. C'est un foncteur covariant en $A$ et en $B$. Il jouit des propriétés suivantes:

3.1. $A * B \approx B * A$.

3.2. Soit $0 \to L \to M \to N \to 0$ une suite exacte, $A$ un groupe; on a alors une suite exacte:

$$0 \to A * L \to A * M \to A * N \to A \otimes L \to A \otimes M \to A \otimes N \to 0.$$

3.3. Le foncteur $A * B$ commute avec les opérations de somme directe (finie ou infinie) et de limite inductive.

3.4. $A * B$ ne dépend que des sous-groupes de torsion de $A$ et de $B$ (ce qui justifie la terminologie).

Les propriétés 3.3 et 3.4 montrent que, pour calculer $A * B$ lorsque $A$ et $B$ sont de type fini, il suffit de connaître $A * Z_n$, où $Z_n$ désigne le groupe cyclique d'ordre $n$. Or, il résulte immédiatement de la définition donnée plus haut que:

3.5. $A * Z_n \approx {}_nA$, sous-groupe des éléments $a \in A$ tels que $na = 0$.

Le produit de torsion intervient de façon essentielle dans la *formule de Künneth*:

3.6. Soient $K$ et $L$ deux complexes gradués, $K \otimes L$ leur produit tensoriel (muni de la structure de complexe gradué déduite de celles de $K$ et de $L$). Supposons $K$ ou $L$ sans torsion; alors les groupes d'homologie de $K$, de $L$, et de $K \otimes L$ sont liés par la suite exacte:

$$0 \to \sum_{i+j=n} H_i(K) \otimes H_j(L) \to H_n(K \otimes L) \to \sum_{i+j=n-1} H_i(K) * H_j(L) \to 0.$$

3.7. Si les sous-groupes des cycles de $K$ et de $L$ possèdent des supplémentaires dans $K$ et $L$ respectivement, la suite exacte précédente se réduit à une somme directe.

Les cas particuliers les plus importants de 3.6 et 3.7 sont: (a) celui où $K$ et $L$ sont libres (en Topologie, cela fournit l'homologie d'un produit direct en fonction de celle de ses facteurs), (b) celui où $K$ est libre et où l'opérateur bord de $L$ est nul ("*formule des coefficients universels*" qui, en Topologie, fournit l'homologie d'un espace à valeurs dans un groupe de coefficients arbitraire en fonction de l'homologie à coefficients entiers).

Les propriétés 3.1, $\cdots$, 3.7 sont des cas très particuliers des propriétés démontrées dans l'article [3] déjà cité; signalons par exemple qu'elles sont vraies sans aucun changement pour les modules sur un anneau principal; nous nous sommes bornés au cas de l'anneau des entiers parce qu'il est suffisant pour la suite.

## 4. Deux axiomes sur les classes

Revenons aux propriétés des classes. Dans le Chapitre suivant (relatif aux espaces fibrés), nous aurons besoin de supposer que les classes $\mathcal{C}$ considérées vérifient l'un ou l'autre des deux axiomes suivants:

($\mathrm{II_A}$). *$A \in \mathcal{C}$ et $B \in \mathcal{C}$ entraînent $A \otimes B \in \mathcal{C}$ et $A * B \in \mathcal{C}$.*

$(\mathrm{II_B})$. *$A \in \mathcal{C}$ entraîne $A \otimes B \in \mathcal{C}$ quel que soit $B$.*

L'axiome $(\mathrm{II_B})$ entraîne l'axiome $(\mathrm{II_A})$. En effet:

PROPOSITION 3. *L'axiome* $(\mathrm{II_B})$ *est équivalent à chacun des axiomes:*

$(\mathrm{II_B})'$. *$A \in \mathcal{C}$ entraîne $A \otimes B \in \mathcal{C}$ et $A * B \in \mathcal{C}$ quel que soit $B$.*

$(\mathrm{II_B})''$. *Quel que soit $A \in \mathcal{C}$, toute somme directe (finie ou infinie) de groupes isomorphes à $A$ est dans $\mathcal{C}$.*

$(\mathrm{II_B})$ *entraîne* $(\mathrm{II_B})''$, car $(\mathrm{II_B})''$ équivaut à dire que $A \otimes L \in \mathcal{C}$ si $A \in \mathcal{C}$ et si $L$ est libre.

$(\mathrm{II_B})''$ *entraîne* $(\mathrm{II_B})'$; en effet, soit $A \in \mathcal{C}$ et $B$ arbitraire; écrivons $B = L/R$, où $L$ (donc $R$) est libre; d'après $(\mathrm{II_B})''$ on a $A \otimes L \in \mathcal{C}$ et $A \otimes R \in \mathcal{C}$; comme $A \otimes B$ est isomorphe à un groupe quotient de $A \otimes L$, et que $A * B$ est isomorphe à un sous-groupe de $A \otimes R$, on a bien aussi $A \otimes B \in \mathcal{C}$ et $A * B \in \mathcal{C}$.

$(\mathrm{II_B})'$ *entraîne* $(\mathrm{II_B})$ trivialement.

COROLLAIRE. *Soit $\mathcal{C}$ une classe vérifiant* $(\mathrm{II_B})$*; si $A$ et $B$ sont $\mathcal{C}$-isomorphes respectivement à $A'$ et $B'$, alors $A \otimes B$ et $A * B$ sont $\mathcal{C}$-isomorphes respectivement à $A' \otimes B'$ et $A' * B'$.*

Il suffit de prouver ce Corollaire lorsque $B = B'$; en outre, vu la définition des $\mathcal{C}$-isomorphismes, on peut supposer qu'il existe $f: A \to A'$ tel que $\mathrm{Ker}.f \in \mathcal{C}$ et $\mathrm{Coker}.f \in \mathcal{C}$; en factorisant $f$ par $A \to \mathrm{Im}.f \to A'$, on se ramène aux deux cas particuliers où $\mathrm{Ker}.f = 0$ et $\mathrm{Coker}.f = 0$. Examinons le premier cas (le second étant tout à fait semblable); on a donc une suite exacte $0 \to A \xrightarrow{f} A' \to A'' \to 0$, avec $A'' \in \mathcal{C}$. Appliquant 3.2, on en tire la suite exacte:

$$0 \to A * B \to A' * B \to A'' * B \to A \otimes B \to A' \otimes B \to A'' \otimes B \to 0.$$

D'après $(\mathrm{II_B})''$, on a $A'' * B \in \mathcal{C}$ et $A'' \otimes B \in \mathcal{C}$, d'où le fait que $A * B \to A' * B$ et $A \otimes B \to A' \otimes B$ sont des $\mathcal{C}$-isomorphismes sur, ce qui achève la démonstration.

PROPOSITION 4. *Soient $\mathcal{C}$ une classe vérifiant* $(\mathrm{II_B})$, *$X$ un espace topologique, et $\mathbf{G}$ un système local sur $X$ (au sens de Steenrod) formé de groupes abéliens tous isomorphes à un même groupe $G$ tel que $G \in \mathcal{C}$. On a alors $H_i(X, \mathbf{G}) \in \mathcal{C}$ pour tout $i \geqq 0$.*

Soit $S(X)$ le complexe singulier de $X$; les groupes $H_i(X, \mathbf{G})$ sont les groupes d'homologie du complexe $S(X) \otimes G$, muni d'un certain opérateur bord; puisque $G \in \mathcal{C}$, on a $S(X) \otimes G \in \mathcal{C}$ d'après $(\mathrm{II_B})$, d'où a fortiori $H_i(X, \mathbf{G}) \in \mathcal{C}$ pour tout $i \geqq 0$.

*Note.* Il existe des classes qui ne vérifient pas $(\mathrm{II_B})$: on en verra des exemples au n° 6. Par contre, j'ignore s'il existe des classes ne vérifiant pas $(\mathrm{II_A})$.

## 5. Un nouvel axiome

Soit $\Pi$ un groupe, commutatif ou non, et $L$ un groupe abélien sur lequel $\Pi$ opère à droite; on définit alors classiquement (cf. [5], [6]) les *groupes d'homologie de $\Pi$ à valeurs dans $L$*, notés $H_i(\Pi, L)$. En particulier, on peut prendre pour $L$ le groupe additif des entiers, $Z$, sur lequel $\Pi$ opère trivialement; les groupes $H_i(\Pi, Z)$ ainsi obtenus seront appelés *groupes d'homologie de* $\Pi$, et notés simplement

$H_i(\Pi)$. Par définition, ce sont les groupes d'homologie du *complexe non homogène* de $\Pi$, tel qu'il est défini dans [5]. Rappelons quelques propriétés classiques de ces groupes:

5.1. Si $\Pi$ est limite inductive des groupes $\Pi_\alpha$, alors $H_i(\Pi)$ est limite inductive des $H_i(\Pi_\alpha)$ pour tout $i$ (en effet, le complexe non homogène de $\Pi$ est limite inductive des complexes non homogènes des $\Pi_\alpha$).

5.2. $H_{2i}(Z_n) = 0$ si $i > 0$, $H_{2i+1}(Z_n) = Z_n$ si $i \geqq 0$.

5.3. $H_0(Z) = H_1(Z) = Z$, $H_i(Z) = 0$ si $i > 1$.

5.4. Soient $S$ et $T$ deux groupes; on a:

$$H_n(S \times T) \approx \textstyle\sum_{i+j=n} H_i(S) \otimes H_j(T) + \sum_{i+j=n-1} H_i(S) * H_j(T).$$

(En effet, soient $K_S$ et $K_T$ les complexes non homogènes de $S$ et $T$ respectivement; il résulte immédiatement de la théorie des complexes libres et acycliques que $H_n(S \times T) \approx H_n(K_S \otimes K_T)$ pour tout $n$, et la formule de Künneth donne alors le résultat).

Les propriétés 5.2, 5.3, 5.4 permettent évidemment de calculer $H_i(\Pi)$ lorsque $\Pi$ est abélien de type fini.

Ce rappel étant fait, nous pouvons poser notre nouvel axiome (nécessaire pour l'étude des groupes d'homotopie):

(III). *$A \in \mathcal{C}$ entraîne $H_i(A) \in \mathcal{C}$ pour tout $i > 0$.*

*Note.* J'ignore s'il existe des classes ne vérifiant pas (III).

## 6. Exemples de classes vérifiant les axiomes ($\mathrm{II}_\mathrm{A}$) et (III).

(Dans chacun de ces exemples la vérification de l'axiome (I) est laissée au lecteur.)

6.1. *Les groupes de type fini.* Si les $a_i$ engendrent $A$ et les $b_j$ engendrent $B$, les $a_i \otimes b_j$ engendrent $A \otimes B$ qui est donc de type fini. Ecrivons maintenant $B = L/R$, où $L$ est le groupe libre de base les $b_j$ ; $L$ est de type fini, donc également $R$, et puisque $A * B$ est isomorphe, par définition, à un sous-groupe de $A \otimes R$, $A * B$ est de type fini, ce qui achève la vérification de ($\mathrm{II}_\mathrm{A}$).

Pour prouver (III) il suffit, d'après 5.4, de le vérifier lorsque $A = Z$, et lorsque $A = Z_n$ ; cela résulte alors de 5.2 et de 5.3.

6.2. *Les groupes dont l'ensemble des éléments a une puissance inférieure ou égale à un cardinal infini donné $\aleph_\alpha$.*

Puisque tout élément de $A \otimes B$ s'écrit sous la forme $\sum a_i \otimes b_i$, $a_i \in A$, $b_i \in B$, le groupe $A \otimes B$ a au plus $\aleph_\alpha$ éléments[2]. Soit maintenant $L$ le groupe libre de base l'ensemble des éléments de $B$; on a $B = L/R$, et $L$ (donc aussi $R$) a au plus $\aleph_\alpha$ éléments; puisque $A * B$ est isomorphe à un sous-groupe de $A \otimes R$, il a au plus $\aleph_\alpha$ éléments d'après ce qui précède. L'axiome ($\mathrm{II}_\mathrm{A}$) est donc vérifié.

Soit $K_\mathrm{A}$ le complexe non homogène de $A$; d'après sa définition, ce complexe admet une base ayant au plus $\aleph_\alpha$ éléments, ce qui montre que ses groupes d'homologie ont au plus $\aleph_\alpha$ éléments, et vérifie (III).

[2] Rappelons (Bourbaki, *Ensembles*, Chapitre III) que, si $E$ est un ensemble infini, l'ensemble des parties finies de $E$ est équipotent à $E$.

6.3. *Les groupes finis.* L'axiome ($\mathrm{II_A}$) résulte immédiatement de 3.3, 3.4, 3.5. L'axiome (III) résulte de 5.2 et 5.4.

6.4. *Les groupes finis dont l'ordre n'est divisible que par les nombres premiers appartenant à une famille donnée.*

Même démonstration que pour 6.3.

6.5. *Les groupes qui vérifient la condition de chaîne descendante pour leurs sous-groupes.* On doit s'appuyer sur la structure de ces groupes (voir *Bourbaki*, Alg. VII, Exercices): ce sont des sommes directes finies de groupes finis et de groupes du type $U_p$ (ibid. §2, Ex. 3; les groupes de type $U_p$ sont parfois appelés *groupes de type* $(p^\infty)$); or on voit aisément que $U_p \otimes A = U_p * A = 0$ lorsque $A$ est un groupe de torsion; l'axiome ($\mathrm{II_A}$) est donc vérifié.

Utilisant le fait que $U_p$ est limite inductive de groupes $Z_{(p^k)}$ et la propriété 5.1, on montre que $H_i(U_p) = 0$ lorsque $i$ est pair et $> 0$, et que $H_i(U_p) = U_p$ si $i$ est impair. L'axiome (III) résulte de là et de la propriété 5.4.

## 7. Exemples de classes vérifiant les axiomes ($\mathrm{II_B}$) et (III).

Introduisons d'abord un nouvel axiome:

(IV). *Toute somme directe (finie ou infinie) de groupes de* $\mathcal{C}$ *est dans* $\mathcal{C}$.

Cet axiome est d'ailleurs visiblement équivalent au suivant:

(IV)′. *Toute limite inductive de groupes de* $\mathcal{C}$ *est dans* $\mathcal{C}$.

Proposition 5. *L'axiome* (IV) *entraîne les axiomes* ($\mathrm{II_B}$) *et* (III).

L'axiome (IV) entraîne trivialement $(\mathrm{II_B})''$, donc aussi ($\mathrm{II_B}$). Montrons qu'il entraîne (III). Soit $A \in \mathcal{C}$; $A$ est limite inductive de ses sous-groupes de type fini, $A_\alpha$, et d'après 5.1 $H_i(A)$ est donc limite inductive des $H_i(A_\alpha)$; d'après l'axiome (IV)′ on est donc ramené à montrer que, si $A$ est de type fini et appartient à $\mathcal{C}$, alors $H_i(A)$ appartient à $\mathcal{C}$. Or ceci est une simple conséquence de l'axiome (I), car il résulte de 5.2, 5.3 et 5.4 que $H_i(A)$ est, pour tout $i > 0$, isomorphe à un groupe quotient de $A^j$, où $j$ est assez grand.

Donnons maintenant des exemples de classes:

7.0. *Les groupes à un seul élément.*

7.1. *Les groupes de torsion*[3].

L'axiome (IV) est évidemment vérifié.

7.2. *Les groupes de torsion dont les p-composants sont nuls pour une famille donnée de nombres premiers p.*

L'axiome (IV) est évidemment vérifié.

7.3. *Les groupes* $A$ *tels qu'il existe un entier* $K \neq 0$ *avec* $K \cdot a = 0$ *pour tout* $a \in A$.

L'axiome ($\mathrm{II_B}$) résulte de ce que $K(\sum a_i \otimes b_i) = \sum (Ka_i) \otimes b_i = 0$. Pour

---

[3] Rappelons (Bourbaki, *Algèbre*, Chapitre VII) qu'un groupe abélien $A$ est dit *de torsion* si pour tout $x \in A$ il existe un entier $n \neq 0$ tel que $n \cdot x = 0$. Si $p$ est un nombre premier, le *p-composant* (ou composante $p$-primaire) d'un groupe $A$ est le sous-groupe des $x \in A$ pour lesquels il existe un entier $k \geqq 0$ avec $p^k \cdot x = 0$; si $A$ est un groupe de torsion, il est somme directe de ses $p$-composants ($p$ parcourant l'ensemble des nombres premiers). Si $A$ est réduit à son $p$-composant ($p$ premier donné), on dit que $A$ est un *p-groupe*; si $A$ est de type fini, cela équivaut à dire que $A$ est fini et que son ordre est une puissance de $p$.

prouver (III), il suffit de montrer que, pour tout $x \in H_i(A)$, $i > 0$, on a $K \cdot x = 0$; puisque $A$ est limite inductive de ses sous-groupes de type fini, il suffit de vérifier ceci lorsque $A$ est de type fini, et cela résulte alors de ce qui a été dit à la fin de la démonstration de la Proposition 5.

REMARQUE. La classe 7.3 ne vérifie pas l'axiome (IV), ce qui montre que celui-ci n'est pas une conséquence des axiomes (I), ($\mathrm{II_B}$) et (III). D'ailleurs, on peut déterminer toutes les classes qui vérifient (IV): si l'on excepte celle formée de *tous* les groupes, on trouve qu'elles sont toutes du type 7.2 (la classe 7.1 correspond à la famille vide, la classe 7.0 à la famille pleine).

## CHAPITRE II. ESPACES FIBRÉS

### 1. Espaces fibrés relatifs

Soit $(E, p, B)$ un espace fibré au sens de [8], II (en d'autres termes, la projection $p: E \to B$ vérifie le théorème de relèvement des homotopies pour les polyèdres); soit $B'$ un sous-espace de $B$, et soit $E' = p^{-1}(B')$. Nous dirons que le couple $(E, E')$ est *un espace fibré relatif de base le couple $(B, B')$ et de même fibre $F$ que $E$.*

Les propriétés des espaces fibrés relatifs sont tout à fait analogues à celles des espaces fibrés absolus. Par exemple, si $B' \neq \emptyset$, on a:

PROPOSITION 1. *La projection $p$ définit un isomorphisme de $\pi_i(E, E')$ sur $\pi_i(B, B')$ pour tout $i \geqq 0$.*

Soit $b \in B'$, et soit $F = p^{-1}(b)$; considérons le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_i(E', F) & \to & \pi_i(E, F) & \to & \pi_i(E, E') & \to & \pi_{i-1}(E', F) & \to & \pi_{i-1}(E, F) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \pi_i(B', b) & \to & \pi_i(B, b) & \to & \pi_i(B, B') & \to & \pi_{i-1}(B', b) & \to & \pi_{i-1}(B, b). \end{array}$$

Les deux lignes de ce diagramme sont des suites exactes, et les 4 homomorphismes "verticaux" extrêmes sont des isomorphismes sur, on le sait. Le lemme des cinq montre alors que l'homomorphisme vertical médian est un isomorphisme sur, ce qui démontre la Proposition.

### 2. La suite spectrale d'homologie d'un espace fibré relatif

Nous conservons les notations du numéro précédent; nous supposons en outre que $B$, $B'$ et $F$ sont *connexes par arcs* et que $B' \neq \emptyset$ (le cas $B' = \emptyset$ ayant été traité dans [8], II); choisissons un point $b \in B'$ et un point $x \in E'$ tels que $p(x) = b$. Tous les cubes singuliers considérés auront leurs sommets en $x$ (ou $b$); cela ne change pas l'homologie, vu les hypothèses de connexion faites plus haut.

Soit $C(E)$ le complexe singulier cubique de $E$, $C(E')$ celui de $E'$; les groupes d'homologie du complexe $C(E)/C(E')$ sont, par définition, les groupes d'homologie du couple $(E, E')$. La filtration définie dans [8], II, n° 4 sur $C(E)$ induit une filtration sur $C(E')$, et une filtration sur $C(E)/C(E')$. Cela définit trois suites spectrales, que nous noterons respectivement $E_r^{p,q}$, $'E_r^{p,q}$ et $''E_r^{p,q}$ $(r = 0, 1, \cdots, \infty)$; les deux premières sont les suites spectrales attachées respectivement aux espaces fibrés $E$ et $E'$; par définition, la troisième sera dite *attachée à l'espace fibré relatif* $(E, E')$.

On posera, comme d'ordinaire, $E_r^p = \sum_q E_r^{p,q}$, et de même pour $'E_r^p$ et $''E_r^p$. Avec cette notation, considérons le diagramme:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & 'E_0^p & \to & E_0^p & \to & ''E_0^p & \to & 0 \\ \downarrow & & \varphi' \downarrow & & \varphi \downarrow & & \varphi'' \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & C_p(B') \otimes C(F) & \to & C_p(B) \otimes C(F) & \to & C_p(B, B') \otimes C(F) & \to & 0. \end{array}$$

Les lignes de ce diagramme sont des suites exactes, comme on le voit immédiatement; l'homomorphisme $\varphi$: $E_0^p \to C_p(B) \otimes C(F)$ est celui qui est défini dans [8], II, n° 4; les autres homomorphismes verticaux sont définis à partir de $\varphi$, par restriction et passage au quotient. Comme $\varphi$ et $\varphi'$ sont des équivalences de chaînes (*loc. cit.* n° 5), il en est de même de $\varphi''$, ce qui, par passage à l'homologie, donne le diagramme suivant (où les flèches verticales sont maintenant des isomorphismes sur):

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & 'E_1^p & \to & E_1^p & \to & ''E_1^p & \to & 0 \\ \downarrow & & \varphi' \downarrow & & \varphi \downarrow & & \varphi'' \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & C_p(B') \otimes H(F) & \to & C_p(B) \otimes H(F) & \to & C_p(B, B') \otimes H(F) & \to & 0. \end{array}$$

Puisque les homomorphismes horizontaux proviennent d'homomorphismes respectant la filtration, ils commutent avec la différentielle $d_1$. Or nous connaissons $d_1$ sur $E_1^p \approx C_p(B) \otimes H(F)$ (*loc. cit.* n° 6); il en résulte que l'isomorphisme $\varphi''$ transforme la différentielle $d_1''$ en la différentielle naturelle de $C_p(B, B')$, au sens des coefficients locaux que forment les groupes $H(F)$ sur l'espace $B$. D'où, puisque $E_2 = H(E_1)$:

Proposition 2. *Soit* $(E, E')$ *un espace fibré relatif de base* $(B, B')$ *et de fibre* $F$, *les espaces* $B, B'$ *et* $F$ *étant connexes par arcs. Le terme* $''E_2^{p,q}$ *de la suite spectrale d'homologie attachée à* $(E, E')$ *est canoniquement isomorphe à* $H_p(B, B'; H_q(F))$, *p-ème groupe d'homologie singulière de* $(B, B')$ *à valeurs dans le système local formé par* $H_q(F)$ *sur* $B$.

(Si, au lieu de filtrer $C(E)/C(E')$, on avait filtré $C(E)/C(E') \otimes G$, où $G$ est un groupe de coefficients, on aurait obtenu:

$$''E_2^{p,q} \approx H_p(B, B'; H_q(F, G)). \qquad \text{Cf. [8], II, th. 2.)}$$

Il résulte de la Proposition précédente que la suite spectrale attachée à l'espace fibré relatif $(E, E')$ a toutes les propriétés formelles d'une suite spectrale d'espace fibré absolu. Son terme $E_\infty$ est le groupe gradué associé au groupe filtré $H(E, E')$. Plus précisément, considérons l'homomorphisme $p_* : H_i(E, E') \to H_i(B, B')$; comme dans le cas absolu, Ker.$p_*$ admet une suite de composition dont les quotients successifs sont les groupes $''E_\infty^{m,n}$ $(m + n = i, n > 0)$; on a Im.$p_* = ''E_\infty^{i,0} \subset H_i(B, B')$: c'est l'intersection des noyaux des $d_r'' : ''E_r^{i,0} \to ''E_r^{i-r,r-1}$,

$r \geqq 2$. En particulier Coker.$p_*$ admet une suite de composition dont les quotients successifs sont isomorphes à des sous-groupes des groupes $''E_r^{i-r,r-1}$ $(r = 2, 3, \cdots, i)$.

(Comme dans [8], ces propriétés sont de simples conséquences de la Prop. 2, et de la théorie générale des suites spectrales développée dans [8], I).

On notera cependant une différence avec le cas absolu: on a $E_r^{0,q} = 0$ pour $r \geqq 2$ et tout $q \geqq 0$, car $H_0(B, B') = 0$ puisque $B' \neq \emptyset$.

### 3. La suite spectrale de cohomologie d'un espace fibré relatif

Nous n'expliciterons pas les résultats qui sont simplement les *transposés* de ceux du n° 2, et nous nous bornerons à donner une propriété du *cup-product*:

On sait que le cup-product d'un élément $f \in C^n(E, E')$ et d'un élément $g \in C^m(E)$ est un élément $f \cdot g \in C^{m+n}(E, E')$, et que l'on a la formule habituelle de dérivation:

$$d(f \cdot g) = df \cdot g + (-1)^n f \cdot dg.$$

En outre, on voit tout de suite que le cup-product est compatible avec les filtrations et définit donc des applications bilinéaires:

$$''E_r^{p,q} \times E_r^{p',q'} \to {}''E_r^{p+p',q+q'},$$

qui, si on les note $(x, y) \to x \cdot y$, satisfont à la formule:

$$d_r''(x \cdot y) = (d_r'' x) \cdot y + (-1)^{p+q}\, x \cdot (d_r y).$$

Pour $r = 2$, le produit $x \cdot y$ s'obtient en multipliant par $(-1)^{p'q}$ le cup-product de $x \in H^p(B, B'; H^q(F))$ par $y \in H^{p'}(B, H^{q'}(F))$: cela se voit de la même façon que le Théorème 3 de [8], II.

### 4. Les théorèmes principaux

Nous conservons les hypothèses et notations des numéros précédents; on a donc $\pi_0(B) = \pi_0(B') = \pi_0(F) = 0$ et $B' \neq \emptyset$. En outre, nous supposons que *le système local formé par $H_i(F)$ sur $B$ est trivial pour tout $i$*; il résulte alors de la Proposition 2 et de la formule des coefficients universels que:

$$(4.1) \qquad ''E_2^{p,q} \approx H_p(B, B') \otimes H_q(F) + H_{p-1}(B, B') * H_q(F).$$

Théorème 1. A. *Soit $\mathcal{C}$ une classe de groupes abéliens vérifiant l'axiome* ($\mathrm{II_A}$). *Supposons que $H_1(B, B') = 0$, que $H_i(B, B') \in \mathcal{C}$ pour $0 \leqq i < p$, et que $H_j(F) \in \mathcal{C}$ pour $0 < j < q$ ($p$ et $q$ étant des entiers donnés). Posons $r = \mathrm{Inf}\ (p, q + 1)$. Alors la projection $p_*: H_i(E, E') \to H_i(B, B')$ est $\mathcal{C}$-biunivoque pour $i \leqq r$ et $\mathcal{C}$-sur pour $i \leqq r + 1$.*

Théorème 1. B. *Soit $\mathcal{C}$ une classe de groupes abéliens vérifiant l'axiome ($II_B$). Supposons que $H_i(B, B') \in \mathcal{C}$ pour $0 \leqq i < p$, et que $H_j(F) \in \mathcal{C}$ pour $0 < j < q$ ($p$ et $q$ étant des entiers donnés). Posons $r = p + q - 1$. Alors la projection $p_*: H_i(E, E') \to H_i(B, B')$ est $\mathcal{C}$-biunivoque pour $i \leqq r$ et $\mathcal{C}$-sur pour $i \leqq r + 1$.*

Nous ferons simultanément les deux démonstrations.

(a) D'après ce qu'on a vu au n° 2, pour prouver que Ker.$p_* \in \mathcal{C}$ si $i \leqq r$, il suffit de montrer que $''E_\infty^{m,n} \in \mathcal{C}$ si $m + n \leqq r$ et $n > 0$, et il suffit *a fortiori* de montrer que $''E_2^{m,n} \in \mathcal{C}$ si $m + n \leqq r$ et $n > 0$.

Si l'on est dans les hypothèses du Théorème 1. A, alors $r = \operatorname{Inf}(p, q + 1)$, et, comme $m + n \leqq r$, cela donne soit $m = 0, 1$, et alors $H_m(B, B') = H_{m-1}(B, B') = 0$, soit $1 < m < p$, et alors $0 < n < q$, d'où $H_m(B, B') \in \mathcal{C}$, $H_{m-1}(B, B') \in \mathcal{C}$, $H_n(F) \in \mathcal{C}$. Dans les deux cas la formule (4.1) montre bien que $''E_2^{m,n} \in \mathcal{C}$, compte tenu de $(\mathrm{II}_\mathrm{A})$.

Si maintenant l'on est dans les hypothèses du Théorème 1.B, alors $r = p + q - 1$, et l'on a soit $m < p$ auquel cas $H_m(B, B') \in \mathcal{C}$ et $H_{m-1}(B, B') \in \mathcal{C}$, soit $0 < n < q$ auquel cas $H_n(F) \in \mathcal{C}$. Dans les deux cas la formule (4.1) montre bien que $''E_2^{m,n} \in \mathcal{C}$, compte tenu de $(\mathrm{II}_\mathrm{B})'$.

(b) D'après ce qu'on a vu au n° 2, Coker.$p_*$ admet une suite de composition dont les quotients successifs sont isomorphes à des sous-groupes des termes $''E_s^{i-s,s-1}$ $(s = 2, 3, \cdots, i)$. Il nous suffit donc de prouver que $''E_2^{i-s,s-1} \in \mathcal{C}$ lorsque l'on a $2 \leqq s \leqq i$, et $i \leqq r + 1$; mais cela vient justement d'être fait dans (a) et le théorème est donc démontré.

Remarque. Si l'on suppose que $\mathcal{C}$ est la classe des groupes à un seul élément et que $B'$ est réduit à un point, on retrouve un résultat connu (cf. [8], p. 469):

*Si $H_i(F) = 0$ pour $0 < i < q$, et $H_i(B) = 0$ pour $0 < i < p$, alors la projection $p_*$: $H_i(E, F) \rightarrow H_i(B)$ est biunivoque pour $0 \leqq i \leqq p + q - 1$ et sur pour $0 < i \leqq p + q$.*

## 5. Applications

Dans ce numéro, $E$ désigne un espace fibré de base $B$, fibre $F$; $B$ et $F$ sont supposés connexes par arcs, et $B$ simplement connexe.

Proposition 3. A. *Soit $\mathcal{C}$ une classe vérifiant* $(\mathrm{II}_\mathrm{A})$. *Supposons que $H_i(E) \in \mathcal{C}$ pour tout $i > 0$, et que $H_i(B) \in \mathcal{C}$ pour $0 < i < p$; alors $H_i(F) \in \mathcal{C}$ pour $0 < i < p - 1$, et $H_{p-1}(F)$ est $\mathcal{C}$-isomorphe à $H_p(B)$.*

Proposition 3. B. *Soit $\mathcal{C}$ une classe vérifiant* $(\mathrm{II}_\mathrm{B})$. *Supposons les hypothèses de la Proposition précédente remplies. Alors $H_i(F)$ est $\mathcal{C}$-isomorphe à $H_{i+1}(B)$ pour $0 < i < 2p - 2$.*

Les deux Propositions se démontrent par récurrence sur $p$, le cas $p = 1$ étant trivial. L'hypothèse de récurrence montre d'abord que $H_i(F) \in \mathcal{C}$ pour $0 < i < p - 2$, et que $H_{p-2}(F)$ est $\mathcal{C}$-isomorphe à $H_{p-1}(B)$, donc appartient aussi à $\mathcal{C}$. Appliquant alors le Théorème 1. A (resp. le Théorème 1. B) avec $q = p - 1$ et $B'$ réduit à un point, on voit que $H_i(E, F)$ est $\mathcal{C}$-isomorphe à $H_i(B)$ pour $i = p$(resp. $0 < i \leqq 2p - 2$). Comme, d'après la suite exacte du couple $(E, F)$ et l'hypothèse faite sur $E$, $H_{i-1}(F)$ est $\mathcal{C}$-isomorphe à $H_i(E, F)$ pour $i > 1$, les Propositions en résultent.

Introduisons maintenant une définition:

Un espace $X$ sera dit $\mathcal{C}$-*acyclique*[4] si $H_i(X) \in \mathcal{C}$ pour tout $i > 0$.

[4] Notons que l'axiome $(\mathrm{II}_\mathrm{A})$ équivaut à dire que si deux espaces $X$ et $Y$ sont connexes et $\mathcal{C}$-acycliques, leur produit direct est aussi $\mathcal{C}$-acyclique.

On a alors:

Proposition 4. A. *Soit* $\mathcal{C}$ *une classe vérifiant* ($\mathrm{II_A}$). *Si deux des trois espaces* $E$, $B$, $F$ *sont* $\mathcal{C}$*-acycliques, le troisième l'est aussi.*

Si les deux espaces sont $B$ et $F$, il résulte de la formule des coefficients universels que $E_2^{i,j} \in \mathcal{C}$ lorsque $i + j > 0$, d'où $E_\infty^{i,j} \in \mathcal{C}$, et le groupe gradué associé à $H_n(E)$ appartient à $\mathcal{C}$ pour tout $n > 0$; il en résulte que $H_n(E)$ lui-même appartient à $\mathcal{C}$.

Si les deux espaces sont $E$ et $B$, on applique la Proposition 3. A avec $p = \infty$.

Si les deux espaces sont $E$ et $F$, montrons par récurrence sur $n$ que $H_n(B) \in \mathcal{C}$, le cas $n = 1$ étant trivial. En appliquant la Proposition 3. A et l'hypothèse de récurrence, on voit que $H_{n-1}(F)$ est $\mathcal{C}$-isomorphe à $H_n(B)$, et, comme $H_{n-1}(F) \in \mathcal{C}$, cela donne bien $H_n(B) \in \mathcal{C}$.

Remarque. Si l'on prend pour $\mathcal{C}$ la classe des groupes de type fini (cf. Chapitre I, 6.1), on retrouve la Proposition 1 du Chapitre III de [8], sous l'hypothèse supplémentaire $\pi_1(B) = 0$. Cette hypothèse supplémentaire nous a simplement servi à simplifier la démonstration: il serait en effet facile de prouver la Proposition précédente sous la seule hypothèse que le système local formé par $H_i(F)$ sur $B$ est trivial pour tout $i$. Nous en laissons la vérification au lecteur.

Proposition 5. B. *Soit* $\mathcal{C}$ *une classe vérifiant* ($\mathrm{II_B}$). *Supposons que* $H_i(B) \in \mathcal{C}$ *pour tout* $i > 0$. *Alors l'homomorphisme* $H_i(F) \to H_i(E)$ *est un* $\mathcal{C}$*-isomorphisme sur pour tout* $i \geqq 0$.

Il suffit de voir que $H_i(E, F) \in \mathcal{C}$ pour tout $i \geqq 0$, ce qui résulte du Théorème 1. B, où l'on prend $B'$ réduit à un point, $q = 1$ et $p = \infty$.

Proposition 6. B. *Soit* $\mathcal{C}$ *une classe vérifiant* ($\mathrm{II_B}$). *Supposons que* $H_i(F) \in \mathcal{C}$ *pour tout* $i > 0$. *Alors l'homomorphisme* $H_i(E) \to H_i(B)$ *est un* $\mathcal{C}$*-isomorphisme sur pour tout* $i \geqq 0$.

Il suffit de voir que $H_i(E, F) \to H_i(B, B')$ est un $\mathcal{C}$-isomorphisme sur, $B'$ étant réduit à un point; or cela résulte du Théorème 1. B, où l'on prend $p = 1$ et $q = \infty$.

Remarques. 1. La Proposition 5. B est un "théorème de Feldbau mod $\mathcal{C}$", la Proposition 6. B un "théorème de Vietoris mod $\mathcal{C}$".

2. Les Propositions 5. B et 6. B ne subsistent pas lorsqu'on suppose seulement que $\mathcal{C}$ vérifie ($\mathrm{II_A}$): il suffit de prendre $E = B \times F$ pour le voir.

## 6. Espaces de lacets et groupes d'Eilenberg-MacLane

Soit $X$ un espace tel que $\pi_0(X) = \pi_1(X) = 0$ et soit $\Omega$ l'espace des lacets de $X$. On sait (cf. [8], IV) qu'il existe un espace fibré contractile de fibre $\Omega$ et de base $X$; les résultats du numéro précédent lui sont donc applicables; en particulier:

Proposition 7. A. *Soit* $\mathcal{C}$ *une classe vérifiant* ($\mathrm{II_A}$). *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*:

(a) $X$ *est* $\mathcal{C}$*-acyclique.*

(b) $\Omega$ *est* $\mathcal{C}$*-acyclique.*

Soit maintenant $\Pi$ un groupe abélien, $n$ un entier $\geqq 1$; nous noterons $H_i(\Pi; n)$

les groupes d'homologie du complexe d'Eilenberg-MacLane $K(\Pi, n)$ (pour la définition de ce complexe, voir [5]). Les groupes $H_i(\Pi; 1)$ ne sont autres que les *groupes d'homologie de* $\Pi$, dont nous avons rappelé les propriétés au Chapitre I, n° 5.

On sait (cf. [8], p. 499) que pour tout couple $(\Pi, n)$ il existe un espace $X$ tel que $\pi_i(X) = 0$ si $i \neq n$, $\pi_n(X) = \Pi$; un tel espace sera dit *un espace* $\mathcal{K}(\Pi, n)$; cette terminologie est justifiée par le fait que $H_i(\mathcal{K}(\Pi, n)) = H_i(\Pi; n)$ pour tout $i$ (cf. [5]).

PROPOSITION 8. *Soit* $\mathcal{C}$ *une classe vérifiant les axiomes* ($\text{II}_\text{A}$) *et* (III). *Si* $\Pi \in \mathcal{C}$, *on a* $H_i(\Pi; n) \in \mathcal{C}$ *pour* $i \geqq 1$, $n \geqq 1$.

(En d'autres termes si $\Pi \in \mathcal{C}$, tout espace $\mathcal{K}(\Pi, n)$ est $\mathcal{C}$-acyclique).

On raisonne par récurrence sur $n$, le cas $n = 1$ n'étant rien d'autre que l'axiome (III). Soit donc $n \geqq 2$, et soit $X$ un espace $\mathcal{K}(\Pi, n)$; il est clair que l'espace $\Omega$ des lacets de $X$ est un espace $\mathcal{K}(\Pi, n - 1)$; d'après l'hypothèse de récurrence on a donc $H_i(\Omega) \in \mathcal{C}$ pour tout $i > 0$, d'où (Proposition 7. A) $H_i(X) \in \mathcal{C}$ pour tout $i > 0$.

REMARQUE. Cette Proposition est bien connue dans le cas particulier des classes 6.1, 6.3 et 6.4 du Chapitre I; cf. [8], VI.

## CHAPITRE III. LES THÉORÈMES D'HUREWICZ ET DE J. H. C. WHITEHEAD

### 1. Le théorème d'Hurewicz

THÉORÈME 1. *Soit* $\mathcal{C}$ *une classe vérifiant les axiomes* ($\text{II}_\text{A}$) *et* (III). *Soit* $X$ *un espace tel que* $\pi_0(X) = \pi_1(X) = 0$ *et que* $\pi_i(X) \in \mathcal{C}$ *pour* $i < n$, $n$ *étant un entier donné. On a alors* $H_i(X) \in \mathcal{C}$ *pour* $0 < i < n$, *et* $\pi_n(X) \to H_n(X)$ *est un* $\mathcal{C}$-*isomorphisme sur.*

Lorsque $\mathcal{C}$ est la classe des groupes à un seul élément, on retrouve bien le théorème d'Hurewicz classique.

Nous donnerons deux démonstrations de ce théorème, la première faisant usage de la méthode introduite dans [8], V, la seconde de celle introduite dans [4].

*Première démonstration.* (Cette démonstration n'est valable que si $X$ est (ULC), au sens de [8], p. 490.)

On procède par récurrence sur $n$, le théorème étant trivial pour $n = 1$. L'hypothèse de récurrence montre que $H_i(X) \in \mathcal{C}$ pour $0 < i < n$, et il nous suffit d'étudier l'homomorphisme $\pi_n(X) \to H_n(X)$.

Soit $\Omega$ l'espace des lacets de $X$, $T$ le revêtement universel de $\Omega$ (qui existe, puisque $X$ est (ULC)); on a $\pi_0(T) = \pi_1(T) = 0$ ainsi que $\pi_i(T) = \pi_{i+1}(X)$ pour $i \geqq 2$; appliquant alors l'hypothèse de récurrence à $T$ on en conclut que $H_i(T) \in \mathcal{C}$ pour $0 < i < n - 1$ et que $\pi_{n-1}(T) \to H_{n-1}(T)$ est un $\mathcal{C}$-isomorphisme sur.

Considérons maintenant le revêtement $T \to \Omega$, et appliquons-lui la suite spectrale de Cartan-Leray[5]; son terme $E_2^{p,q}$ est isomorphe au groupe

[5] Cette suite est brièvement étudiée dans [3], le lecteur pourra également se reporter à un article de G. Hochschild et l'auteur (*Cohomology of group extensions*, à paraître aux Trans. Amer. Math. Soc.) où sont établies les propriétés de la suite spectrale duale (appli-

$H_p(\pi_1(\Omega), H_q(T))$, et son terme $E_\infty$ est le groupe gradué associé au groupe filtré $H(\Omega)$. Posons $\Pi = \pi_1(\Omega) = \pi_2(X)$; d'après l'hypothèse faite on a $\Pi \in \mathcal{C}$, d'où $H_i(\Omega) \in \mathcal{C}$ d'après (III). D'autre part $\Pi$ opère *trivialement* sur les groupes $H_i(T)$ ([8], p. 479) ce qui permet d'appliquer la formule des coefficients universels à $H_p(\Pi, H_q(T))$:

$$H_p(\Pi, H_q(T)) \approx H_p(\Pi) \otimes H_q(T) + H_{p-1}(\Pi) * H_q(T).$$

En appliquant ($\mathrm{II_A}$), on voit alors que $E_2^{p,q} \in \mathcal{C}$ pour $p \geqq 0, 0 < q < n - 1$, et pour $q = 0, p > 0$; on a donc $E_2^{p,q} \in \mathcal{C}$ si $0 < p + q < n - 1$, et lorsque $p + q = n - 1$ et $p > 0$; en dimension totale $n - 1$ le seul terme qui n'appartient peut-être pas à $\mathcal{C}$ est donc $E_2^{0,n-1} \approx H_0(\Pi, H_{n-1}(T)) = H_{n-1}(T)$; en outre aucun des éléments de ce terme, à part 0, n'est un bord pour les $d_r$, alors que les $d_r$ appliquent ce groupe dans des groupes appartenant à $\mathcal{C}$; il en résulte finalement que $H_{n-1}(T) \to H_{n-1}(\Omega)$ est un $\mathcal{C}$-isomorphisme sur. On voit de même que $H_i(\Omega) \in \mathcal{C}$ pour $0 < i < n - 1$. Enfin, puisque $\pi_i(T) \to \pi_i(\Omega)$ est un isomorphisme sur pour $i \geqq 2$, et un $\mathcal{C}$-isomorphisme sur pour $i = 1$, on voit que $\pi_{n-1}(\Omega) \to H_{n-1}(\Omega)$ est un $\mathcal{C}$-isomorphisme sur.

Soit maintenant $E$ l'espace fibré des chemins de $X$ d'origine fixée $x \in X$. Le couple $(E, \Omega)$ est donc un espace fibré relatif de fibre $\Omega$ et de base $(X, x)$; en lui appliquant le Théorème 1. A avec $p = n$, $q = n - 1$, on obtient le fait que $H_n(E, \Omega) \to H_n(X)$ est un $\mathcal{C}$-isomorphisme sur. Considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_{n-1}(\Omega) & \leftarrow & \pi_n(E, \Omega) & \rightarrow & \pi_n(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{n-1}(\Omega) & \leftarrow & H_n(E, \Omega) & \rightarrow & H_n(X). \end{array}$$

Dans ce diagramme, les flèches horizontales sont toutes des $\mathcal{C}$-isomorphismes sur, et nous avons vu qu'il en est de même de l'homomorphisme $\pi_{n-1}(\Omega) \to H_{n-1}(\Omega)$. Les autres flèches verticales, et en particulier $\pi_n(X) \to H_n(X)$, sont donc aussi des $\mathcal{C}$-isomorphismes sur, ce qui achève cette démonstration.

## 2. Le théorème d'Hurewicz; deuxième démonstration

Rappelons d'abord le principe de la méthode de calcul des groupes d'homotopie introduite par H. Cartan et l'auteur dans [4], et, indépendamment, par G. W. Whitehead[6]:

A tout espace $X$ on associe une suite d'espaces $(X, n)$ $(n = 1, 2, \cdots,$ et $(X, 1) = X)$ et d'applications continues $f_n : (X, n + 1) \to (X, n)$ de telle

cable à la cohomologie). On peut d'ailleurs retrouver la suite spectrale de Cartan-Leray par la méthode de [4], en introduisant un espace fibré $\Omega'$, de même type d'homotopie que $\Omega$, de fibre $T$, et de base un espace $\mathcal{K}(\pi_1(\Omega), 1)$. Voir aussi [1] où ceci est généralisé à un espace fibré principal de groupe structural non nécessairement discret.

[6] *Voir* G. W. Whitehead. *Fiber spaces and the Eilenberg homology groups*. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **38**, 1952, p. 426–430.

sorte que:

(I). Le triple $(X, n + 1)$, $f_n$, $(X, n)$ est un espace fibré de fibre un espace $\mathcal{K}(\pi_n(X), n - 1)$.

(II). Il existe un espace fibré $X'_n$, qui a même type d'homotopie que $(X, n)$, dont la fibre est $(X, n + 1)$ et la base un espace $\mathcal{K}(\pi_n(X), n)$.

En outre $\pi_i(X, n) = 0$ pour $i < n$, et $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_{n-1}$ définit un isomorphisme de $\pi_i(X, n)$ sur $\pi_i(X)$ pour $i \geqq n$.

(On définit les $(X, n)$ par récurrence sur $n$; on plonge $(X, n)$, supposé construit, dans un espace $\mathcal{K}(\pi_n(X), n)$ obtenu par adjonction de cellules à $(X, n)$; ceci fait, $(X, n + 1)$ est l'espace des chemins de $\mathcal{K}(\pi_n(X), n)$ dont l'origine est fixée et l'extrémité est dans $(X, n)$; $X'_n$ est l'espace des chemins de $\mathcal{K}(\pi_n(X), n)$ d'origine arbitraire et d'extrémité dans $(X, n)$; les fibrations (I) et (II) sont alors des fibrations standard d'espaces de chemins.)

Il résulte des propriétés homotopiques des $(X, n)$ et du théorème d'Hurewicz classique (que nous supposons connu) que l'on a:

$$H_n(X, n) \approx \pi_n(X, n) \approx \pi_n(X).$$

Ainsi les groupes d'homotopie de $X$ sont isomorphes à certains groupes d'homologie des $(X, n)$; c'est évidemment ce qui permet d'utiliser les espaces $(X, n)$ pour le calcul des $\pi_i(X)$.

Après ces préliminaires, venons-en à la démonstration du Théorème 1. De même que dans la 1-ère démonstration on procède par récurrence sur $n$, et on est ramené à voir que $\pi_n(X) \to H_n(X)$ est un $\mathcal{C}$-isomorphisme sur. Introduisons les espaces $(X, j)$ associés à $X$ comme il vient d'être dit. Comme $\pi_1(X) = 0$, on peut poser $(X, 2) = X$. En outre $\pi_i(X, j) \in \mathcal{C}$ pour $i < n$, d'où $H_i(X, j) \in \mathcal{C}$ pour $0 < i < n$. Démontrons un lemme:

LEMME 1. *Si $j < n$, la projection $(f_j)_*: H_i(X, j + 1) \to H_i(X, j)$ est $\mathcal{C}$-biunivoque pour $i \leqq n$ et $\mathcal{C}$-sur pour $i \leqq n + 1$.*[7]

On applique le Théorème 1. A du Chapitre II avec $E = (X, j + 1)$, $F = \mathcal{K}(\pi_j(X), j - 1)$, $B = (X, j)$, $B'$ réduit à un point, $p = n$, $q = \infty$. C'est licite, car du fait que $j < n$, on a $\pi_j(X) \in \mathcal{C}$, d'où (Chapitre II, Proposition 8) $H_i(F) \in \mathcal{C}$ pour tout $i > 0$. L'homomorphisme $H_i(E, F) \to H_i(B, B')$ est donc un $\mathcal{C}$-isomorphisme pour $i \leqq n$, et est $\mathcal{C}$-sur pour $i \leqq n + 1$; comme $H_i(E) \to H_i(E, F)$ est un $\mathcal{C}$-isomorphisme sur pour tout $i > 0$ en raison de la suite exacte d'homologie, le lemme est démontré.

Considérons maintenant le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, n) & \to & H_n(X, n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_n(X) & \to & H_n(X). \end{array}$$

Dans ce diagramme, les homomorphismes $\pi_n(X, n) \to H_n(X, n)$ et $\pi_n(X, n) \to$

[7] Si $\mathcal{C}$ vérifie $(\mathrm{II}_B)$, $(f_j)_*: H_i(X, j + 1) \to H_i(X, j)$ est un $\mathcal{C}$-isomorphisme sur pour $j < n$, $i \geqq 0$.

$\pi_n(X)$ sont des isomorphismes sur, et il résulte du Lemme précédent que $H_n(X, n) \to H_n(X)$ est un $\mathcal{C}$-isomorphisme sur. Donc $\pi_n(X) \to H_n(X)$ est un $\mathcal{C}$-isomorphisme sur et la démonstration est achevée.

COROLLAIRE 1. *Si* $\pi_0(X) = \pi_1(X) = 0$, *et si* $H_i(X) \in \mathcal{C}$ *pour* $0 < i < n$, *alors* $\pi_i(X) \in \mathcal{C}$ *pour* $i < n$.

En prenant pour classe $\mathcal{C}$ la classe des groupes finis, ou bien des groupes de type fini, on retrouve des résultats de [8], V, débarrassés de l'hypothèse: $X$ est (ULC). En prenant pour classe $\mathcal{C}$ la classe des groupes finis d'ordre premier à $p$, $p$ premier donné, on trouve un résultat sensiblement plus précis que celui de [8], p. 401 qui affirme simplement que, si $H_n(X)$ est de type fini, alors l'homomorphisme $\pi_n(X) \otimes Z_p \to H_n(X) \otimes Z_p$ est un isomorphisme sur.

On notera un cas particulier intéressant du Cor. 1:

COROLLAIRE 2. *Si* $\pi_0(X) = \pi_1(X) = 0$ *et si* $X$ *est* $\mathcal{C}$*-acyclique, alors* $X$ *est* $\mathcal{C}$*-asphérique, i.e.* $\pi_i(X) \in \mathcal{C}$ *pour tout* $i$.

REMARQUES. 1. Il résulte du Lemme 1 que $H_{n+1}(X, n) \to H_{n+1}(X)$ est $\mathcal{C}$-sur. Supposons $n \geqq 2$ (le cas $n = 1$ étant trivial); on sait alors que $H_{n+1}(\Pi; n) = 0$ pour tout groupe $\Pi$, et il s'ensuit aisément que $\pi_{n+1}(X, n) \to H_{n+1}(X, n)$ est sur (cf. [10], par exemple). En combinant ces deux résultats on obtient:

*L'homomorphisme* $\pi_{n+1}(X) \to H_{n+1}(X)$ *est* $\mathcal{C}$*-sur.*

2. On pourrait croire que le Théorème 1 subsiste lorsqu'on ne suppose plus $X$ simplement connexe, mais qu'on suppose seulement que $\pi_1(X)$ est abélien et appartient à $\mathcal{C}$; il n'en est rien comme le montre l'exemple de la classe des groupes de type fini. Cependant, supposons que $X$ possède un revêtement universel $\hat{X}$, que $\pi_1(X)$ soit abélien, appartienne à $\mathcal{C}$, et opère trivialement sur les groupes $H_i(\hat{X})$ (c'est notamment le cas lorsque $X$ est un $H$-espace au sens de [8], IV); alors le Théorème 1 vaut pour $X$. Cela se voit en appliquant d'abord le Théorème 1 à $\hat{X}$, puis en appliquant au revêtement $\hat{X} \to X$ la suite spectrale de Cartan-Leray, comme dans la démonstration du n° 1.

3. Comme on l'a déjà remarqué, la deuxième démonstration du Théorème 1 *utilise* le théorème d'Hurewicz classique. Par contre la première ne l'utilise pas, et le démontre donc à nouveau; d'ailleurs dans ce cas la démonstration se simplifie notablement du fait que $T = \Omega$; en particulier on n'a plus besoin de supposer que $X$ est ULC. On notera que cette démonstration du théorème d'Hurewicz présente sur les démonstrations classiques l'avantage technique de n'utiliser aucun "lemme d'additivité"; il faut simplement savoir que $\pi_1(X)$, rendu abélien. est isomorphe à $H_1(X)$, ce qui est tout à fait élémentaire.

## 3. Le théorème d'Hurewicz relatif

THÉORÈME 2. *Soit* $\mathcal{C}$ *une classe vérifiant les axiomes* ($\text{II}_\text{B}$) *et* (III). *Soient* $A$ *et* $B$ *deux espaces connexes et simplement connexes par arcs, tels que* $A \subset B$*; on suppose que* $\pi_2(A) \to \pi_2(B)$ *est sur. Alors, si* $\pi_i(B, A) \in \mathcal{C}$ *pour* $i < n$, $n$ *étant un entier donné, on a* $H_i(B, A) \in \mathcal{C}$ *pour* $0 < i < n$, *et* $\pi_n(B, A) \to H_n(B, A)$ *est un* $\mathcal{C}$*-isomorphisme sur.*

Nous supposerons $A \neq \emptyset$, le cas $A = \emptyset$ résultant du Théoréme 1. On procède alors par récurrence sur $n$, le cas $n = 1$ étant trivial, et on est ramené à voir que $\pi_n(B, A) \to H_n(B, A)$ est un $\mathcal{C}$-isomorphisme sur.

Soit $b$ un point de $B$, $T$ l'espace des chemins de $B$ d'origine en $b$ et d'extrémité arbitraire, $Y$ le sous-espace de $T$ formé des chemins d'extrémité contenue dans $A$; la projection $p: T \to B$ qui, à un chemin, fait correspondre son extrémité, définit *le couple* $(T, Y)$ *comme un espace fibré relatif de base le couple* $(B, A)$ *et de fibre l'espace* $\Omega_B$ *des lacets de* $B$. Il en résulte d'abord (Chapitre II, Proposition 1) $\pi_i(T, Y) \approx \pi_i(B, A)$ pour tout $i$, d'où, puisque $T$ est rétractile, $\pi_i(B, A) \approx \pi_{i-1}(Y)$, résultat d'ailleurs évident directement. La suite exacte:

$$\pi_2(A) \to \pi_2(B) \to \pi_2(B, A) \to \pi_1(A) \to \pi_1(B) \to \pi_1(B, A) \to 0$$

montre que les hypothèses faites entraînent $\pi_1(B, A) = \pi_2(B, A) = 0$, d'où $\pi_0(Y) = \pi_1(Y) = 0$. Comme $\pi_i(Y) \in \mathcal{C}$ pour $i < n - 1$, on peut appliquer à $Y$ le Théorème 1, et $\pi_{n-1}(Y) \to H_{n-1}(Y)$ est un $\mathcal{C}$-isomorphisme sur.

D'autre part l'espace fibré relatif $(T, Y)$ vérifie les hypothèses du Théorème 1. B du Chapitre II avec $p = n$ et $q = 1$ (la fibre $\Omega_B$ est connexe puisque on a supposé $B$ simplement connexe); donc $H_n(T, Y) \to H_n(B, A)$ est un $\mathcal{C}$-isomorphisme sur. Considérons alors le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_{n-1}(Y) & \leftarrow & \pi_n(T, Y) & \rightarrow & \pi_n(B, A) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H_{n-1}(Y) & \leftarrow & H_n(T, Y) & \rightarrow & H_n(B, A).
\end{array}$$

Dans ce diagramme toutes les flèches horizontales sont des $\mathcal{C}$-isomorphismes sur, et en outre nous avons prouvé que $\pi_{n-1}(Y) \to H_{n-1}(Y)$ est aussi un $\mathcal{C}$-isomorphisme sur; il en résulte que les autres flèches verticales, et en particulier $\pi_n(B, A) \to H_n(B, A)$, sont des $\mathcal{C}$-isomorphismes sur, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE. *Si* $H_i(B, A) \in \mathcal{C}$ *pour* $0 < i < n$, *alors* $\pi_i(B, A) \in \mathcal{C}$ *pour* $i < n$.

REMARQUES. 1. Le Théorème 2 ne subsiste pas lorsqu'on suppose seulement que $\mathcal{C}$ vérifie $(\mathrm{II}_\mathrm{A})$[8]; cette différence entre les hypothèses des Théorèmes 1 et 2 n'a cependant pas une grande importance pratique, car dans les applications tous les groupes d'homotopie et d'homologie considérés sont, d'ordinaire, des groupes de type fini; or, soit $\mathcal{F}$ la classe des groupes de type fini, $\mathcal{C}$ la classe donnée; considérons la classe $\mathcal{D}$ des groupes dont les sous-groupes de type fini appartiennent à $\mathcal{C}$; il est clair que $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome (IV) du Chapitre I, donc *a fortiori* les axiomes $(\mathrm{II}_\mathrm{B})$ et (III), et que $\mathcal{D} \cap \mathcal{F} = \mathcal{C} \cap \mathcal{F}$. Le Théorème 2 vaudra donc pour $\mathcal{D}$. Ainsi, *si les groupes* $H_i(A)$ *et* $H_i(B)$ *sont de type fini pour tout* $i$, *le Théorème* 2 *est valable sans hypothèse sur la classe* $\mathcal{C}$. Bien entendu, la même remarque s'applique au Théorème 1.

[8] Pour le voir, il suffit de prendre $B = X \times Y$, $A = X \times \{y\}$ $(y \in Y)$, où $Y$ est $\mathcal{C}$-acyclique, et où $X$ est choisi convenablement. En fait, on peut montrer que, pour que le Théorème 2 (resp. le Théorème 1) soit vrai pour une classe $\mathcal{C}$ donnée, il faut et il suffit que $\mathcal{C}$ vérifie $(\mathrm{II}_\mathrm{B})$ et (III) (resp. vérifie $(\mathrm{II}_\mathrm{A})$ et (III)).

2. D'après la Remarque 1 du n° 2, l'homomorphisme $\pi_n(Y) \to H_n(Y)$ est $\mathcal{C}$-sur; d'après le Théorème 1. B du Chapitre II, $H_{n+1}(T, Y) \to H_{n+1}(B, A)$ est $\mathcal{C}$-sur. En combinant ces deux résultats on obtient:

*L'homomorphisme* $\pi_{n+1}(B, A) \to H_{n+1}(B, A)$ *est* $\mathcal{C}$-*sur.*

3. Dans le but de simplifier la démonstration, nous avons fait dans l'énoncé du Théorème 2 des hypothèses assez restrictives sur $A$ et $B$. Ces hypothèses sont remplies dans les cas les plus intéressants, comme on le verra; cependant il y aurait avantage à se débarrasser de l'hypothèse: $\pi_2(A) \to \pi_2(B)$ est sur. On peut y parvenir si l'on suppose que l'espace $Y$ possède un revêtement universel $\hat{Y}$, car on peut montrer que $\pi_1(Y)$ opère trivialement sur les groupes d'homologie de $\hat{Y}$ et $Y$ est donc justiciable de la Remarque 2 du n° 2 (pour établir le premier point, utiliser la loi de composition des lacets pour définir une application continue $\Omega_B \times Y \to Y$, puis raisonner comme dans [8], IV, n° 3). Nous n'insisterons pas là-dessus.

## 4. Le théorème de J. H. C. Whitehead

THÉORÈME 3. *Soit* $\mathcal{C}$ *une classe vérifiant les axiomes* (II$_B$) *et* (III). *Soient* $A$ *et* $B$ *deux espaces connexes et simplement connexes par arcs,* $f: A \to B$ *une application continue qui applique* $\pi_2(A)$ *sur* $\pi_2(B)$, $n$ *un entier* $> 0$. *Les deux propriétés suivantes sont alors équivalentes:*

(a) $f_*: H_i(A) \to H_i(B)$ *est* $\mathcal{C}$-*biunivoque pour* $i < n$ *et* $\mathcal{C}$-*sur pour* $i \leqq n$.

(b) $f_0: \pi_i(A) \to \pi_i(B)$ *est* $\mathcal{C}$-*biunivoque pour* $i < n$ *et* $\mathcal{C}$-*sur pour* $i \leqq n$.

(Si l'on prend pour $\mathcal{C}$ la classe des groupes réduits à un seul élément, on retrouve, à de légères modifications près, un théorème de J. H. C. Whitehead, [13]; la démonstration qui suit est d'ailleurs calquée sur la sienne.)

Introduisons le "mapping cylinder" $B_f$ de l'application $f$ (pour la définition de cette notion, voir par exemple [13]); on sait que les espaces $A$ et $B$ se trouvent canoniquement plongés dans $B_f$, $B$ étant un *rétracte de déformation* de $B_f$. En outre on peut factoriser $f$ en:

$$A \to B_f \to B$$

où la première application est une injection, et la seconde est la rétraction de déformation en question. Les groupes d'homologie (resp. d'homotopie) de $B_f$ et de $B$ sont donc isomorphes, et les propriétés (a) et (b) équivalent à:

(a)′ $H_i(A) \to H_i(B_f)$ *est* $\mathcal{C}$-*biunivoque pour* $i < n$ *et* $\mathcal{C}$-*sur pour* $i \leqq n$.

(b)′ $\pi_i(A) \to \pi_i(B_f)$ *est* $\mathcal{C}$-*biunivoque pour* $i < n$ *et* $\mathcal{C}$-*sur pour* $i \leqq n$.

Il résulte alors des suites exactes d'homologie et d'homotopie du couple $(B_f, A)$ que (a)′ et (b)′ sont respectivement équivalents à:

(a)″ $H_i(B_f, A) \in \mathcal{C}$ *pour* $i \leqq n$.

(b)″ $\pi_i(B_f, A) \in \mathcal{C}$ *pour* $i \leqq n$.

Comme (a)″ et (b)″ sont équivalents d'après le Théorème 2, notre théorème est donc démontré.

## 5. Critères d'application du théorème de J. H. C. Whitehead

Reprenons les hypothèses précédentes, et soient $A$ et $B$ deux espaces connexes et simplement connexes par arcs, $f: A \to B$ une application continue qui applique

$\pi_2(A)$ sur $\pi_2(B)$. Nous supposerons également que *les groupes d'homologie de A et de B sont de type fini en toute dimension*; il en est alors de même des groupes d'homotopie à cause du Théorème 1.

PROPOSITION 1. *Soient $\mathcal{C}$ la classe des groupes finis, $\mathfrak{D}$ la classe des groupes de torsion, k un corps de caractéristique nulle. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) $f_*: H_i(A) \to H_i(B)$ *est* $\mathcal{C}$*-biunivoque pour* $i < n$ *et* $\mathcal{C}$*-sur pour* $i \leqq n$.

(2) $f_*: H_i(A) \to H_i(B)$ *est* $\mathfrak{D}$*-biunivoque pour* $i < n$ *et* $\mathfrak{D}$*-sur pour* $i \leqq n$.

(3) $f_*: H_i(A, k) \to H_i(B, k)$ *est biunivoque pour* $i < n$ *et sur pour* $i \leqq n$.

(4) $f^*: H^i(B, k) \to H^i(A, k)$ *est sur pour* $i < n$ *et biunivoque pour* $i \leqq n$.

Soit $\mathfrak{F}$ la classe des groupes de type fini; puisque $\mathfrak{D} \cap \mathfrak{F} = \mathcal{C} \cap \mathfrak{F}$ il est clair que (1) et (2) sont équivalents. L'équivalence entre (3) et (4) provient de ce que $H^i(A,k)$ (resp. $H^i(B,k)$) est le *dual* du $k$-espace vectoriel $H_i(A,k)$ (resp. $H_i(B,k)$). L'équivalence entre (2) et (3) provient de la formule: $H_i(A, k) \approx H_i(A) \otimes k$ (le produit tensoriel étant pris *sur Z*).

NOTES. (1) Puisque la classe $\mathfrak{D}$ vérifie les axiomes ($\mathrm{II_B}$) et (III), on peut appliquer le Théorème de J. H. C. Whitehead à l'application $f: A \to B$.

(2) La démonstration précédente montre que les propriétés (2), (3), (4) sont équivalentes même si les groupes d'homologie considérés ne sont pas de type fini.

PROPOSITION 2. *Soient $\mathcal{C}$ la classe des groupes finis d'ordre premier à p, (p étant un nombre premier donné), $\mathfrak{D}$ la classe des groupes de torsion dont le p-composant est nul, k un corps de caractéristique p. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) $f_*: H_i(A) \to H_i(B)$ *est* $\mathcal{C}$*-biunivoque pour* $i < n$ *et* $\mathcal{C}$*-sur pour* $i \leqq n$.

(2) $f_*: H_i(A) \to H_i(B)$ *est* $\mathfrak{D}$*-biunivoque pour* $i < n$ *et* $\mathfrak{D}$*-sur pour* $i \leqq n$.

(3) $f_*: H_i(A, k) \to H_i(B, k)$ *est biunivoque pour* $i < n$ *et sur pour* $i \leqq n$.

(4) $f^*: H^i(B, k) \to H^i(A, k)$ *est sur pour* $i < n$ *et biunivoque pour* $i \leqq n$.

L'équivalence de (1) et (2) et l'équivalence de (3) et (4) se montrent de la même façon que dans la Proposition 1. Introduisons alors le mapping-cylinder $B_f$ de $f: A \to B$. Les conditions (1) et (3) équivalent respectivement à:

(1)′ $H_i(B_f, A) \in \mathcal{C}$ *pour* $i \leqq n$.

(3)′ $H_i(B_f, A; k) = 0$ *pour* $i \leqq n$.

L'équivalence de (1)′ et de (3)′ résulte alors de la formule:

$$H_i(B_f, A; k) \approx H_i(B_f, A) \otimes k + H_{i-1}(B_f, A) * k,$$

et du fait que $H_i(B_f, A)$ est de type fini.

NOTES. (1) Il est facile de prouver la Proposition 2 sans passer par l'intermédiaire du mapping-cylinder.

(2) Les Propositions 1 et 2 permettent dans de nombreux cas de remplacer les calculs "modulo $\mathcal{C}$" par des calculs à coefficients dans un corps.

## Chapitre IV. Groupes d'homotopie des sphères

### 1. Certains endomorphismes

Soient $\mathbf{S}_n$ une sphère de dimension $n$, $h\colon \mathbf{S}_n \to \mathbf{S}_n$ une application de degré $q \neq 0$; cette application définit un endomorphisme $\varphi_q^{i,n}$ (ou, plus simplement, $\varphi_q$) de $\pi_i(\mathbf{S}_n)$. En désignant par $i_n$ l'application identique de $\mathbf{S}_n$, on a donc:

$$\varphi_q^{i,n}(\alpha) = (q \cdot i_n) \circ \alpha, \quad si\ \alpha \in \pi_i(\mathbf{S}_n). \tag{1.1}$$

On a évidemment:

$$\varphi_{qq'} = \varphi_q \circ \varphi_{q'}. \tag{1.2}$$

Enfin il est classique[9] que:

$$\varphi_q^{i,n}(\alpha) = q \cdot \alpha \qquad \text{lorsque } n = 1, 3, 7 \text{ ou lorsque } i < 2n - 1. \tag{1.3}$$

Nous donnerons d'autres propriétés des endomorphismes $\varphi_q$ au Chapitre V, n° 1; dans ce Chapitre nous n'utiliserons que le résultat suivant:

Proposition 1. *Soient $q$ un entier non nul, $\mathcal{C}$ la classe des groupes finis d'ordre divisant une puissance de $q$; l'endomorphisme $\varphi_q^{i,n}$ est alors un $\mathcal{C}$-automorphisme de $\pi_i(\mathbf{S}_n)$.*

On applique le Théorème de J. H. C. Whitehead (Chapitre III, Théorème 3) à $h\colon \mathbf{S}_n \to \mathbf{S}_n$ ; c'est licite car les groupes d'homologie de $\mathbf{S}_n$ sont de type fini (cf. Chapitre III, n° 3, Remarque 1 ainsi que Chapitre III, n° 5), à condition que l'on ait $n \geqq 3$. Mais pour $n = 1$, on a $\varphi_q(\alpha) = q \cdot \alpha$, et pour $n = 2$, $\varphi_q(\alpha) = q^2 \cdot \alpha$ si $i \geqq 3$. Ceci démontre la Proposition.

Corollaire. *Soit $p$ un nombre premier ne divisant pas $q$; la restriction de $\varphi_q$ au $p$-composant de $\pi_i(\mathbf{S}_n)$ est un automorphisme.*

### 2. La variété des vecteurs tangents à une sphère de dimension paire

Soit $\mathbf{W}_{2n-1}$ la variété des vecteurs de longueur unité tangents à $\mathbf{S}_n$, $n$ pair; on sait que les seuls groupes d'homologie non nuls de $\mathbf{W}_{2n-1}$ sont:

$$H_0(\mathbf{W}_{2n-1}) = Z, \qquad H_{n-1}(\mathbf{W}_{2n-1}) = Z_2, \qquad H_{2n-1}(\mathbf{W}_{2n-1}) = Z.$$

Nous avons utilisé cette variété dans [8], pour l'étude des groupes $\pi_i(\mathbf{S}_n)$; nous allons compléter les résultats que nous avions obtenus.

Proposition 2. *Soit $\mathcal{C}$ la classe des 2-groupes finis; il existe une application $f\colon \mathbf{S}_{2n-1} \to \mathbf{W}_{2n-1}$ telle que $f_0\colon \pi_i(\mathbf{S}_{2n-1}) \to \pi_i(\mathbf{W}_{2n-1})$ soit un $\mathcal{C}$-isomorphisme sur pour tout $i$.*

On sait que le revêtement universel de $\mathbf{W}_3$ est $\mathbf{S}_3$, ce qui nous permet de nous borner au cas $n \geqq 4$; appliquant alors le Théorème de J. H. C. Whitehead, on voit qu'il suffit de trouver $f\colon \mathbf{S}_{2n-1} \to \mathbf{W}_{2n-1}$ tel que l'homomorphisme $f_*\colon H_{2n-1}(\mathbf{S}_{2n-1}) \to H_{2n-1}(\mathbf{W}_{2n-1})$ soit un $\mathcal{C}$-isomorphisme sur, ou, ce qui revient au

[9] *Voir* B. Eckmann. *Ueber die Homotopiegruppen von Gruppenraümen*. Comment. Math. Helv., **14**, 1941, p. 234–256.

même, de trouver un élément de $\pi_{2n-1}(W_{2n-1})$ dont l'image dans $H_{2n-1}(W_{2n-1})$ engendre un sous-groupe d'indice une puissance de 2; comme un tel élément existe d'après le Théorème d'Hurewicz (Chapitre III, Théorème 1), la Proposition est démontrée.

Remarque. Soit $g$: $W_{2n-1} \to S_{2n-1}$ une application de degré brouwérien égal à 1; le Théorème de J. H. C. Whitehead montre que $g_0$: $\pi_i(W_{2n-1}) \to \pi_i(S_{2n-1})$ est aussi un $\mathcal{C}$-isomorphisme sur pour tout $i$.

Corollaire. *Si p est premier* $\neq 2$, *le p-composant de* $\pi_i(W_{2n-1})$ *est isomorphe à celui de* $\pi_i(S_{2n-1})$.

Rappelons maintenant sans démonstration un résultat connu[10]:

Lemme 1. *Soit* W *un espace fibre de base* $S_n$, *de fibre* $F$, *et soit* $d$: $\pi_i(S_n) \to \pi_{i-1}(F)$ *l'homomorphisme bord de la suite exacte d'homotopie de* W; *posons* $\gamma = d(i_n) \in \pi_{n-1}(F)$, *et désignons par* $E$ *la suspension de Freudenthal. On a alors, pour tout* $\alpha \in \pi_i(S_{n-1})$:

$$dE(\alpha) = \gamma\circ\alpha, \text{ dans le groupe } \pi_i(F).$$

Appliquons ce Lemme à $W_{2n-1}$ fibré par $F = S_{n-1}$, base $S_n$; la classe $\gamma$ est ici $2\cdot i_{n-1} \in \pi_{n-1}(S_{n-1})$, et le Lemme montre alors que $dE = \varphi_2$, les notations étant celles du n° 1. Si $\mathcal{C}$ est la classe des 2-groupes finis on sait (Proposition 1) que $\varphi_2$ est un $\mathcal{C}$-automorphisme de $\pi_{i-1}(S_{n-1})$; appliquant à la suite exacte:

$$\pi_{i+1}(S_n) \to \pi_i(S_{n-1}) \to \pi_i(W_{2n-1}) \to \pi_i(S_n) \to \pi_{i-1}(S_{n-1}),$$

la Proposition 2 du Chapitre I, on obtient finalement:

Proposition 3. *Soient* $\mathcal{C}$ *la classe des 2-groupes finis, n un entier pair. Soit* $k$: $\pi_i(W_{2n-1}) + \pi_{i-1}(S_{n-1}) \to \pi_i(S_n)$ *l'homomorphisme qui coincide sur la première composante de la somme directe avec la projection* $\pi_i(W_{2n-1}) \to \pi_i(S_n)$, *et sur la seconde composante avec la suspension de Freudenthal. L'homomorphisme k ainsi défini est un* $\mathcal{C}$-*isomorphisme sur pour tout* $i \geqq 0$.

Les Propositions 2 et 3 entraînent:

Corollaire 1. *Le groupe* $\pi_i(S_n)$, *n pair, est* $\mathcal{C}$-*isomorphe à la somme directe de* $\pi_{i-1}(S_{n-1})$ *et de* $\pi_i(S_{2n-1})$.

Le Corollaire précédent sera précisé plus loin (Proposition 5, Corollaire 2). Notons dès maintenant qu'il contient comme cas particulier:

Corollaire 2. *Le p-composant de* $\pi_i(S_n)$ *(p premier* $\neq 2$, *n pair) est isomorphe à la somme directe des p-composants de* $\pi_{i-1}(S_{n-1})$ *et de* $\pi_i(S_{2n-1})$.

## 3. La suspension itérée

Soit $\Omega_n$ l'espace des lacets de $S_n$; si nous identifions $S_{n-1}$ à l'*équateur* de $S_n$, on voit que tout point de $S_{n-1}$ détermine un *lacet* d'un type particulier, ce qui a pour effet de *plonger* $S_{n-1}$ *dans* $\Omega_n$. Il est bien connu (E. Pitcher[11], G. W. Whitehead [12]) que l'homomorphisme ainsi défini $E$: $\pi_{i-1}(S_{n-1}) \to \pi_{i-1}(\Omega_n) = \pi_i(S_n)$

---

[10] *Voir* B. Eckmann. *Espaces fibrés et homotopie.* Colloque de Topologie, Bruxelles, 1950, p. 83–99, §*2.3*.

[11] Proc. Int. Congress 1950, I, p. 528–529.

coincide avec la suspension de Freudenthal. En appliquant le théorème d'Hurewicz relatif au couple $(\Omega_n, \mathbf{S}_{n-1})$ on retrouve ainsi la "partie facile" des théorèmes de Freudenthal; nous n'insisterons pas là-dessus, renvoyant le lecteur à [12] pour plus de détails.

PROPOSITION 4. *Soient $n$ un entier impair, $p$ un nombre premier, $\mathcal{C}$ la classe des groupes finis d'ordre premier à $p$; posons $r = p(n + 1) - 3$. La suspension itérée $E^2$: $\pi_i(\mathbf{S}_n) \rightarrow \pi_{i+2}(\mathbf{S}_{n+2})$ est $\mathcal{C}$-biunivoque si $i < r$ et $\mathcal{C}$-sur si $i \leqq r$.*

Soient $\Omega_{n+2}$ l'espace des lacets de $\mathbf{S}_{n+2}$, $T$ l'espace des lacets de $\Omega_{n+2}$; le plongement de $\mathbf{S}_{n+1}$ dans $\Omega_{n+2}$ définit un plongement $\Omega_{n+1} \rightarrow T$, d'où un plongement $\mathbf{S}_n \rightarrow \Omega_{n+1} \rightarrow T$; si on identifie $\pi_i(T)$ à $\pi_{i+2}(\mathbf{S}_{n+2})$ il est clair que l'homomorphisme: $\pi_i(\mathbf{S}_n) \rightarrow \pi_{i+2}(\mathbf{S}_{n+2})$ ainsi obtenu n'est autre que $E^2$. Vu la Proposition 2 du Chapitre III et le Théorème de J. H. C. Whitehead, il nous suffit donc de montrer que l'homomorphisme $H^i(T, k) \rightarrow H^i(\mathbf{S}_n, k)$ est sur si $i < r$, et biunivoque si $i \leqq r$ ($k$ étant un corps de caractéristique $p$); or il est évident que cet homomorphisme est un isomorphisme sur si $i = n$ (cela revient à dire que $E^2$ est un isomorphisme sur si $i = n$), et d'autre part on a $H^i(T, k) = 0$ pour $0 < i < n$ et pour $n < i \leqq r$ ([8], Chapitre V, Lemme 6). La Proposition en résulte.

COROLLAIRE. *Les $p$-composants de $\pi_i(\mathbf{S}_n)$ et de $\pi_{i-n+3}(\mathbf{S}_3)$ sont isomorphes si $n$ est impair $\geqq 3$, $p$ premier, et $i < n + 4p - 6$.*

On raisonne par récurrence sur $n$, à partir de $n = 3$; d'après la Proposition 4 il suffit de vérifier que $p(n - 1) - 3 \geqq n + 4p - 8$, ou encore que $(p - 1)(n - 5) \geqq 0$, ce qui est bien exact pour $n \geqq 5$.

REMARQUE. La démonstration de la Proposition 4 donnée plus haut n'est valable que si $n \geqq 3$, à cause des hypothèses restrictives nécessaires à la validité du Théorème de J. H. C. Whitehead; mais il est clair que la Proposition 4 subsiste lorsque $n = 1$, puisque le $p$-composant de $\pi_i(\mathbf{S}_3)$ est nul lorsque $i < 2p$ (cf. [8], p. 496, ainsi que la Proposition 7).

## 4. Homotopie des sphères de dimension paire

Nous utiliserons le Lemme suivant:

LEMME 2. *L'homomorphisme: $\pi_{2n-1}(\mathbf{S}_n) = \pi_{2n-2}(\Omega_n) \rightarrow H_{2n-2}(\Omega_n) = Z$, coincide au signe près avec l'invariant de Hopf.*

(La démonstration sera donnée au n° 7).

Soit $u$: $\mathbf{S}_{2n-1} \rightarrow \mathbf{S}_n$ ($n$ pair) une application d'invariant de Hopf égal à $q$, avec $q \neq 0$; elle définit une application $v$: $\Omega_{2n-1} \rightarrow \Omega_n$ dont nous allons déterminer l'effet sur les algèbres de cohomologie à coefficients entiers $H^*(\Omega_n)$ et $H^*(\Omega_{2n-1})$. On sait ([8], p. 488) que $H^*(\Omega_n)$ admet une base $\{e_i\}$, où $\dim. e_i = i(n - 1)$, $i = 0, 1, \cdots$, telle que:

$$e_0 = 1,\ (e_1)^2 = 0,\ (e_2)^p = p!\, e_{2p},\ e_1 \cdot e_{2p} = e_{2p} \cdot e_1 = e_{2p+1}.$$

De même, $H^*(\Omega_{2n-1})$ admet une base $\{e'_i\}$, où $\dim. e'_i = i(2n - 2)$, $i = 0, 1, \cdots$, telle que: $e'_0 = 1$, $(e'_1)^p = p!\, e'_p$.

Soit $v^*$: $H^*(\Omega_n) \rightarrow H^*(\Omega_{2n-1})$ l'homomorphisme défini par $v$. Il résulte du Lemme 2 ci-dessus que $v^*(e_2) = \pm q \cdot e'_1$, et, en changeant éventuellement $e'_1$ de signe, on peut donc supposer que $v^*(e_2) = q \cdot e_1'$. On tire de là:

$$p!\, v^*(e_{2p}) = v^*((e_2)^p) = q^p \cdot (e_1')^p = q^p \cdot p!\, e_p', \text{ d'où } v^*(e_{2p}) = q^p \cdot e_p'.$$

Comme on a évidemment $v^*(e_{2p+1}) = 0$, il en résulte que $v^*$ est complètement déterminé.

Soit maintenant $j\colon \mathbf{S}_{n-1} \to \Omega_n$ l'application qui définit la suspension; si l'on pose $e'' = j^*(e_1)$, on sait que $e''$ est un générateur de $H^{n-1}(\mathbf{S}_{n-1})$.

A cause de la loi de composition dont est muni l'espace $\Omega_n$, les applications $j$ et $v$ définissent une application

$$j \cdot v : \mathbf{S}_{n-1} \times \Omega_{2n-1} \to \Omega_n .$$

L'algèbre de cohomologie $H^*(\mathbf{S}_{n-1} \times \Omega_{2n-1})$ est canoniquement isomorphe au produit tensoriel $H^*(\mathbf{S}_{n-1}) \otimes H^*(\Omega_{2n-1})$ (cela résulte, soit d'un théorème d'Eilenberg-Zilber sur l'homologie des produits directs, soit d'un raisonnement analogue à celui de [8], p. 473). Cela permet de déterminer immédiatement l'homomorphisme $(j \cdot v)^*$:

$$(j \cdot v)^*(e_{2p}) = q^p \cdot 1 \otimes e_p'$$

$$(j \cdot v)^*(e_{2p+1}) = (j \cdot v)^*(e_1) \cdot (j \cdot v)^*(e_{2p}) = (e'' \otimes 1) \cdot (q^p \cdot 1 \otimes e_p') = q^p \cdot e'' \otimes e_p'.$$

Il résulte de ces formules que $(j \cdot v)^*$ *est biunivoque et a pour conoyau un groupe fini d'ordre une puissance de* $q$, et ceci en toute dimension. D'où, par dualité, la même propriété en homologie; en d'autres termes, si $\mathcal{C}$ désigne la classe des groupes finis d'ordre divisant une puissance de $q$, $(j \cdot v)_* : H_i(\mathbf{S}_{n-1} \times \Omega_{2n-1}) \to H_i(\Omega_n)$ *est un* $\mathcal{C}$*-isomorphisme sur pour tout* $i$.

D'après le Théorème de J. H. C. Whitehead, il en est donc de même de

$$(j \cdot v)_0\colon \pi_i(\mathbf{S}_{n-1} \times \Omega_{2n-1}) \to \pi_i(\Omega_n).$$

Mais le groupe $\pi_i(\mathbf{S}_{n-1} \times \Omega_{2n-1})$ est isomorphe à $\pi_i(\mathbf{S}_{n-1}) + \pi_i(\Omega_{2n-1})$, c'est-à-dire à $\pi_i(\mathbf{S}_{n-1}) + \pi_{i+1}(\mathbf{S}_{2n-1})$; de même $\pi_i(\Omega_n)$ est isomorphe à $\pi_{i+1}(\mathbf{S}_n)$. L'homomorphisme $(j \cdot v)_0$ est transformé par les identifications précédentes en un homomorphisme

$$\psi_u\colon \pi_i(\mathbf{S}_{n-1}) + \pi_{i+1}(\mathbf{S}_{2n-1}) \to \pi_{i+1}(\mathbf{S}_n).$$

Il résulte de la définition même de $\psi_u$ que $\psi_u$ coincide sur le premier facteur de la somme directe avec la suspension $E$, et, sur le second facteur avec l'homomorphisme $\alpha \to u \circ \alpha$. On obtient donc finalement (après changement de $i$ en $i - 1$):

PROPOSITION 5. *Soient* $u\colon \mathbf{S}_{2n-1} \to \mathbf{S}_n$ *une application d'invariant de Hopf égal à* $q$ ($q \neq 0$, $n$ *pair*), $\mathcal{C}$ *la classe des groupes fini s d'ordre divisant une puissance de* $q$. *Soit* $\psi_u$ *l'homomorphisme de la somme directe* $\pi_{i-1}(\mathbf{S}_{n-1}) + \pi_i(\mathbf{S}_{2n-1})$ *dans* $\pi_i(\mathbf{S}_n)$ *qui coincide sur le premier facteur avec la suspension et sur le second facteur avec l'application* $\alpha \to u \circ \alpha$. *Pour tout* $i \geqq 0$ $\psi_u$ *est un* $\mathcal{C}$*-isomorphisme sur.*

REMARQUE. La démonstration donnée plus haut de la Proposition 5 n'est valable que si $n \geqq 4$, à cause des hypothèses restrictives nécessaires à la validité du Théorème de J. H. C. Whitehead; mais il est clair que la Proposition 5 subsiste lorsque $n = 2$.

Si $q = 1$ la classe $\mathcal{C}$ de la Proposition 5 est formée des groupes à un seul élément. On a donc:

COROLLAIRE 1. *S'il existe un élément $u \in \pi_{2n-1}(S_n)$ d'invariant de Hopf égal à 1, l'homomorphisme $\psi_u$ est un isomorphisme de $\pi_{i-1}(S_{n-1}) + \pi_i(S_{2n-1})$ sur $\pi_i(S_n)$.*

(En particulier, la suspension $E$: $\pi_{i-1}(S_{n-1}) \to \pi_i(S_n)$ est biunivoque).

On comparera le Corollaire 1 avec un résultat classique d'Hurewicz-Steenrod.

COROLLAIRE 2. *Soient $n$ pair, $i$ arbitraire, $\mathcal{C}$ la classe des 2-groupes finis. Le groupe $\pi_i(S_n)$ est alors $\mathcal{C}$-isomorphe à la somme directe de $\pi_{i-1}(S_{n-1})$ (appliqué par la suspension) et de $\pi_i(S_{2n-1})$ (appliqué par l'intermédiaire de n'importe quel élément $u \in \pi_{2n-1}(S_n)$ d'invariant de Hopf égal à 2).*

Ce résultat est plus précis que celui que nous avions obtenu au n° 2. Nous allons en tirer:

PROPOSITION 6. *Soient $n$ impair, $i$ arbitraire; l'image de $\pi_i(S_n)$ dans $\pi_{i+2}(S_{n+2})$ par $E^2$ est un sous-groupe de $E(\pi_{i+1}(S_{n+1}))$ dont l'indice est une puissance de 2.*

Soit $\mathcal{C}$ la classe des 2-groupes finis; on doit prouver que le quotient de $E(\pi_{i+1}(S_{n+1}))$ par $E^2(\pi_i(S_n))$ appartient à $\mathcal{C}$. D'après le Corollaire 2 à la Proposition 5, $\pi_{i+1}(S_{n+1})$ est $\mathcal{C}$-isomorphe à $\pi_i(S_n) + \pi_{i+1}(S_{2n+1})$; il suffit donc, pour prouver la Proposition, de trouver un élément $u \in \pi_{2n+1}(S_{n+1})$ d'invariant de Hopf égal à 2 et tel que $E(u \circ \alpha) = 0$ pour tout $\alpha$; l'élément $u = [i_{n+1}, i_{n+1}]$ (produit de Whitehead de l'application identique de $S_{n+1}$ avec elle-même) répond évidemment à ces conditions puisque la suspension d'un produit de Whitehead est toujours nulle ([11], 3.66).

COROLLAIRE. *Le p-composant de $E(\pi_{i+1}(S_{n+1}))$ coincide avec celui de $E^2(\pi_i(S_n))$ lorsque $n$ est impair et $p$ premier $\neq 2$.*

NOTE. On trouvera d'autres résultats sur la suspension dans la Note [9]; nous reviendrons là-dessus dans un article ultérieur.

## 5. La sphère de dimension 3

Appliquons à la sphère $S_3$ la méthode de la Note [4] (cf. Chapitre III, n° 2); on obtient ainsi un espace $(S_3, 4) = Y$ et une application continue $\varphi$: $Y \to S_3$ tels que:

5.1. $\pi_i(Y) = 0$ pour $i < 4$.

5.2. $\varphi_0 : \pi_i(Y) \to \pi_i(S_3)$ est un isomorphisme sur lorsque $i \geqq 4$.

5.3. Le triple $(Y, \varphi, S_3)$ est un espace fibré de fibre un espace $\mathcal{K}(Z, 2)$. Nous allons maintenant calculer les groupes d'homologie de $Y$ (cf. [4], II, Proposition 5):

LEMME 3. *Les groupes d'homologie de l'espace $Y$ sont les suivants: $H_i(Y) = 0$ si $i$ est impair; $H_{2n}(Y) = Z_n$.*

(Les premiers groupes sont donc: $Z, 0, 0, 0, Z_2, 0, Z_3, 0, Z_4, 0, \cdots$).

Puisque la base de l'espace fibré $(Y, \varphi, S_3)$ est une *sphère*, on peut lui appliquer *la suite exacte de Wang* (en cohomologie):

$$\cdots \to H^i(Y) \to H^i(Z; 2) \xrightarrow{\vartheta} H^{i-2}(Z; 2) \to H^{i+1}(Y) \to \cdots$$

En outre on sait que l'opérateur $\vartheta$ est une *dérivation* de l'algèbre $H^*(Z; 2)$. Mais cette algèbre, d'après un résultat connu, n'est autre que l'algèbre de polynômes engendrée par un élément $u$ de dimension 2. En faisant $i = 2$ dans la suite exacte précédente, et en remarquant que, d'après 5.1, $H^i(Y) = 0$ lorsque $0 < i < 4$, on voit que $\vartheta(u) = \pm 1$, d'où, en changeant éventuellement le signe de $u$, $\vartheta(u) = 1$. On en tire $\vartheta(u^n) = n \cdot u^{n-1}$, ce qui détermine complètement $\vartheta$, et, ainsi, les groupes $H^i(Y)$: on a $H^i(Y) = 0$ si $i$ est pair $> 0$, et $H^{2n+1}(Y) = Z_n$. Par dualité on en tire les groupes d'homologie de $Y$.

Soit $p$ un nombre premier, $\mathcal{C}$ la classe des groupes finis d'ordre premier à $p$; on a $H_i(Y) \in \mathcal{C}$ pour $0 < i < 2p$, et on peut appliquer à $Y$ le Théorème d'Hurewicz. Compte tenu de 5.2 cela donne:

Proposition 7. *Le p-composant de $\pi_i(\mathrm{S}_3)$ est nul si $i < 2p$; celui de $\pi_{2p}(\mathrm{S}_3)$ est $Z_p$.*

Mais on peut tirer du Lemme 3 des renseignements sensiblement plus précis. Pour cela, introduisons d'abord l'espace $\mathrm{S}_n \mid q$ que l'on obtient en attachant à $\mathrm{S}_n$ une cellule $E_{n+1}$ au moyen d'une application de la frontière de la cellule dans $\mathrm{S}_n$ qui soit de degré $q$ (on supposera toujours $q \neq 0$). Soit $T$ un espace, $x \in \pi_n(T)$ un élément tel que $q \cdot x = 0$, et $f$: $\mathrm{S}_n \to T$ un représentant de $x$; il est clair que l'on peut dans ces conditions *prolonger $f$ en une application $f'$* de $\mathrm{S}_n \mid q$ dans $T$. En particulier, prenons $T = Y$, $n = 2p$ ($p$ premier), $q = p$, et prenons pour $x$ un *générateur* du $p$-composant de $\pi_{2p}(Y)$ (qui est égal à $Z_p$, on l'a vu). On obtient ainsi une application

$$\chi: \mathrm{S}_{2p} \mid p \to Y.$$

Proposition 8. *L'application $\varphi \circ \chi$: $\mathrm{S}_{2p} \mid p \to \mathrm{S}_3$ définit un homomorphisme de $\pi_i(\mathrm{S}_{2p} \mid p)$ sur le p-composant de $\pi_i(\mathrm{S}_3)$ lorsque $i \leqq 4p - 1$; cet homomorphisme est biunivoque lorsque $i \leqq 4p - 2$.*

Remarquons d'abord que tous les groupes $H_i(\mathrm{S}_{2p} \mid p)$ sont nuls si $i > 0$, à la seule exception de $H_{2p}(\mathrm{S}_{2p} \mid p) \approx Z_p$ ; d'après le Théorème d'Hurewicz les groupes $\pi_i(\mathrm{S}_{2p} \mid p)$ sont donc des $p$-groupes (finis) pour tout $i$, ce qui montre que l'image de $\pi_i(\mathrm{S}_{2p} \mid p)$ est contenue dans le $p$-composant de $\pi_i(\mathrm{S}_3)$; si $\mathcal{C}$ désigne, comme plus haut, la classe des groupes finis d'ordre premier à $p$, il nous suffira donc de montrer que $\pi_i(\mathrm{S}_{2p} \mid p) \to \pi_i(\mathrm{S}_3)$ est $\mathcal{C}$-biunivoque pour $3 < i \leqq 4p - 2$, et $\mathcal{C}$-sur pour $3 < i \leqq 4p - 1$, ou encore, d'après 5.2, que $\chi_0 : \pi_i(\mathrm{S}_{2p} \mid p) \to \pi_i(Y)$ est $\mathcal{C}$-biunivoque pour $i \leqq 4p - 2$ et $\mathcal{C}$-sur pour $i \leqq 4p - 1$; comme cette dernière propriété résulte immédiatement du Théorème de J. H. C. Whitehead et du Lemme 3, la Proposition est démontrée.

La Proposition 8 conduit évidemment à se demander ce que sont les groupes $\pi_i(\mathrm{S}_n \mid q)$; nous allons répondre (très partiellement) à cette question:

Proposition 9. *Pour $i \leqq 2n - 2$ on a une suite exacte:*

$$0 \to \pi_i(\mathrm{S}_n) \otimes Z_q \to \pi_i(\mathrm{S}_n \mid q) \to \pi_{i-1}(\mathrm{S}_n) * Z_q \to 0.$$

Pour ne pas compliquer l'écriture, nous poserons $X = \mathrm{S}_n \mid q$; on a $\mathrm{S}_n \subset X$, et on peut écrire la suite exacte d'homotopie du couple $(X, \mathrm{S}_n)$. Soit $g$ une application de $E_{n+1}$ sur $X$ dont la restriction $h$ à $\mathrm{S}_n$ soit de degré $q$; on peut écrire le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_{i+1}(X,\, \mathrm{S}_n) \arrow[r, "d"] & \pi_i(\mathrm{S}_n) \arrow[r] & \pi_i(X) \arrow[r] & \pi_i(X,\, \mathrm{S}_n) \arrow[r, "d"] & \pi_{i-1}(\mathrm{S}_n) \arrow[r] & \cdots \\
& \pi_{i+1}(E,\, \mathrm{S}_n) \arrow[r, "d"] \arrow[u, "g"] & \pi_i(\mathrm{S}_n) \arrow[u, "h"] & & \pi_i(E,\, \mathrm{S}_n) \arrow[r, "d"] \arrow[u, "g"] & \pi_{i-1}(\mathrm{S}_n). \arrow[u, "h"] &
\end{tikzcd}$$

Il résulte d'un théorème de J. H. C. Whitehead, étendu d'une dimension par Blakers-Massey et P. Hilton [7], que $g: \pi_{i+1}(E,\, \mathrm{S}_n) \to \pi_{i+1}(X,\, \mathrm{S}_n)$ est un isomorphisme sur lorsque $i \leqq 2n - 2$; d'autre part l'homomorphisme $h: \pi_i(\mathrm{S}_n) \to \pi_i(\mathrm{S}_n)$ n'est autre que l'homomorphisme $\varphi_q$ du nº 1, et coincide donc avec $\alpha \to q \cdot \alpha$ lorsque $i \leqq 2n - 2$. On peut donc remplacer la suite exacte d'homotopie de $(X,\, \mathrm{S}_n)$ par la suite exacte:

$$\pi_i(\mathrm{S}_n) \xrightarrow{\varphi_q} \pi_i(\mathrm{S}_n) \to \pi_i(\mathrm{S}_n \mid q) \to \pi_{i-1}(\mathrm{S}_n) \xrightarrow{\varphi_q} \pi_{i-1}(\mathrm{S}_n),$$

valable si $i \leqq 2n - 2$. Comme le noyau et le conoyau de $\varphi_q$: $\pi_i(\mathrm{S}_n) \to \pi_i(\mathrm{S}_n)$ sont respectivement isomorphes à $\pi_i(\mathrm{S}_n) * Z_q$ et $\pi_i(S_n) \otimes Z_q$, on obtient finalement la suite exacte de la Proposition 9.

Remarque. La Proposition 9 est tout à fait analogue à la "formule des coefficients universels" utilisée en homologie. Il ne faudrait cependant pas croire que $\pi_i(\mathrm{S}_n \mid q)$ est toujours isomorphe à la somme directe de $\pi_i(\mathrm{S}_n) \otimes Z_q$ et de $\pi_{i-1}(\mathrm{S}_n) * Z_q$ : on peut montrer que c'est inexact si $n = 4$, $q = 2$, $i = 6$.

## 6. Groupes d'homotopie des sphères

En groupant les renseignements donnés par les Propositions 4, 5, 7, 8, 9 on peut obtenir des résultats sur les $p$-composants des groupes $\pi_i(\mathrm{S}_n)$ qui sont sensiblement plus précis que ceux de [8]. Commençons par $p = 2$:

Proposition 10. *Les groupes $\pi_{n+1}(\mathrm{S}_n)$ et $\pi_{n+2}(\mathrm{S}_n) (n \geqq 3)$ sont isomorphes à $Z_2$. Le groupe $\pi_6(\mathrm{S}_3)$ a 12 éléments.*

La Proposition 7 montre que $\pi_4(\mathrm{S}_3) = Z_2$ d'où par suspension le même résultat pour $\pi_{n+1}(\mathrm{S}_n)$, $n \geqq 3$. Appliquant la Proposition 9 avec $n = 4$, $q = 2$, $i = 5$ on obtient $\pi_5(\mathrm{S}_4 \mid 2) = Z_2$, d'où (Proposition 8) le fait que le 2-composant de $\pi_5(\mathrm{S}_3)$ est $Z_2$, et puisque les $p$-composants de $\pi_5(\mathrm{S}_3)$ sont nuls lorsque $p \neq 2$ (Proposition 7) il suit de là que $\pi_5(\mathrm{S}_3) = Z_2$, d'où, par suspension, $\pi_{n+2}(\mathrm{S}_n) = Z_2$. On peut alors appliquer la Proposition 9 avec $n = 4$, $q = 2$, $i = 6$, ce qui donne une suite exacte: $0 \to Z_2 \to \pi_6(\mathrm{S}_4 \mid 2) \to Z_2 \to 0$ qui montre que $\pi_6(\mathrm{S}_4 \mid 2)$ a 4 éléments; d'où (Proposition 8) le fait que le 2-composant de $\pi_6(\mathrm{S}_3)$ a 4 éléments; comme son 3-composant est $Z_3$ et que ses $p$-composants sont nuls pour $p > 3$ (Proposition 7) il en résulte bien que $\pi_6(\mathrm{S}_3)$ a 12 éléments.

Remarques. (1) La méthode précédente donne en outre un moyen de construire des éléments non nuls de $\pi_i(\mathrm{S}_3)$, $i = 5, 6$. Par exemple, il résulte de la démonstration que l'élément non nul de $\pi_i(\mathrm{S}_3)$ est image de l'élément non nul de $\pi_5(\mathrm{S}_4 \mid 2)$; comme ce dernier, d'après la Proposition 9, est obtenu par composition: $\mathrm{S}_5 \to \mathrm{S}_4 \to \mathrm{S}_4 \mid 2$, il s'ensuit que l'élément non nul de $\pi_5(\mathrm{S}_3)$ est de la forme

$S_5 \to S_4 \to S_3$, conformément au résultat connu de L. Pontrjagin et G. W. Whitehead. De la même façon, on voit que l'élément $S_6 \to S_5 \to S_4 \to S_3$ (où chaque application partielle est essentielle) représente un élément non nul de $\pi_6(S_3)$, conformément au résultat connu de P. Hilton ([7], Cor. 4.10).

(2) On pourrait également appliquer la méthode précédente pour obtenir une majoration du 2-composant de $\pi_7(S_3)$ (et donc de $\pi_7(S_3)$ lui-même, d'après le Corollaire à la Proposition 11); il suffirait d'appliquer la Proposition 8 et le Théorème 6.4 de [7].

(3) Il ne m'a pas été possible de montrer par la méthode précédente que $\pi_6(S_3)$ est *cyclique*; en tout cas, il est équivalent de montrer que $\pi_6(S_4 \mid 2)$ est isomorphe à $Z_4$ et non à $Z_2 + Z_2$; c'est d'ailleurs cette équivalence, qui m'a été signalée par P. Hilton, qui est à l'origine de la méthode suivie ici.

Etudions maintenant le cas $p \neq 2$:

PROPOSITION 11. *Soient $n$ impair $\geqq 3$, $p$ premier $\neq 2$. Le $p$-composant de $\pi_i(S_n)$ est nul si $i < n + 2p - 3$, isomorphe à $Z_p$ si $i = n + 2p - 3$, nul si $n + 2p - 3 < i < n + 4p - 6$. En outre les $p$-composants de $\pi_{4p-3}(S_3)$ et de $\pi_{4p-2}(S_3)$ sont isomorphes à $Z_p$.*

Il résulte de la Proposition 7 et du Corollaire à la Proposition 4 que le $p$-composant de $\pi_i(S_n)$ est nul si $i < n + 2p - 3$, isomorphe à $Z_p$ si $i = n + 2p - 3$. Appliquons alors la Proposition 9 avec $n = 2p$, $q = p$, $i \leqq 4p - 3$; puisque $i \leqq 2n - 3$, on a $\pi_i(S_n) = \pi_{i+1}(S_{n+1})$ et ainsi les $p$-composants des groupes d'homotopie des sphères qui interviennent sont connus. On en tire: $\pi_i(S_{2p} \mid p) = 0$ si $2p < i < 4p - 3$, $\pi_{4p-3}(S_{2p} \mid p) = Z_p$.

Appliquant la Proposition 8 on voit que le $p$-composant de $\pi_i(S_3)$ est 0 si $2p < i < 4p - 3$ et que celui de $\pi_{4p-3}(S_3)$ est $Z_p$. Le Corollaire de la Proposition 4 montre alors que le $p$-composant de $\pi_i(S_n)$ est 0 si $n + 2p - 3 < i < n + 4p - 6$, et que celui de $\pi_{n+4p-6}(S_n)$ est 0 ou $Z_p$. Appliquant la Proposition 9 on en tire $\pi_{4p-2}(S_{2p} \mid p) = Z_p$, d'où (Proposition 8) le fait que le $p$-composant de $\pi_{4p-2}(S_3)$ est $Z_p$.

COROLLAIRE. *Les groupes $\pi_7(S_3)$ et $\pi_8(S_3)$ sont des 2-groupes; $\pi_9(S_3)$ est somme directe de $Z_3$ et d'un 2-groupe; $\pi_{10}(S_3)$ est somme directe de $Z_{15}$ et d'un 2-groupe.*

REMARQUES. (1) On a vu en cours de démonstration que le $p$-composant de $\pi_{n+4p-6}(S_n)$ est 0 ou $Z_p$ ($n$ impair $\geqq 5$, $p$ premier $\neq 2$). En fait, on peut montrer au moyen des puissances réduites de N. E. Steenrod que c'est 0.

(2) On obtient un générateur du $p$-composant de $\pi_{4p-3}(S_3)$ par composition: $S_{4p-3} \to S_{2p} \to S_3$ (chaque application partielle étant d'ordre $p$). Cela se voit comme pour $p = 2$.

(3) On peut montrer que le $p$-composant de $\pi_{4p-1}(S_3)$ est 0 si $p \neq 2$. En effet, il résulte de la Proposition 8 et de la démonstration de la Proposition 9 qu'un élément de ce composant peut se mettre sous la forme $S_{4p-1} \to S_{2p} \to S_3$, où $S_{2p} \to S_3$ est d'ordre $p$; mais la suspension d'un tel élément est du type $S_{4p} \to S_{2p+1} \to S_4$ et, comme le $p$-composant de $\pi_{4p}(S_{2p+1})$ est nul (Proposition 11), cette suspension est nulle. L'élément considéré est donc lui-même nul puisque $E: \pi_i(S_3) \to \pi_{i+1}(S_4)$ est biunivoque.

(4) Le lecteur explicitera lui-même les $p$-composants des groupes $\pi_i(S_n)$, $n$ pair, $i < n + 4p - 6$, en combinant la Proposition 11 avec le Corollaire de la Proposition 3.

NOTE. Les résultats ci-dessus ont été d'abord obtenus par H. Cartan qui se servait d'une méthode substantiellement équivalente à celle de la Note [4], ainsi que de certains calculs sur les groupes d'Eilenberg-MacLane. Ils ont été annoncés dans [4], sous réserve de l'exactitude des calculs en question. La démonstration donnée ci-dessus a été trouvée indépendamment par J. C. Moore (en même temps que d'autres résultats intéressants dont il n'est pas question ici).

## 7. Démonstration du Lemme 2

Soit $f$ une application continue de $S_{2n-1}$ dans $S_n$, $n$ pair, et soit $f'\colon S_{2n-2} \to \Omega_n$ l'application qu'elle définit ; nous noterons $D$ le mapping-cylinder de $f$; on a $S_{2n-1} \subset D$, et $D$ est rétractile sur $S_n$. On désignera par $v$ (resp. $w$) un générateur du groupe de cohomologie à coefficients entiers $H^n(D, S_{2n-1})$ (resp. $H^{2n}(D, S_{2n-1})$). D'après N. E. Steenrod[12] l'invariant de Hopf de l'application $f$ est l'entier $m$ tel que $v^2 = m.w$.

Soit d'autre part $m'$ le degré de l'application

$$f'_*\colon H_{2n-2}(S_{2n-2}) \to H_{2n-2}(\Omega_n);$$

c'est aussi le degré de $f'^*\colon H^{2n-2}(\Omega_n) \to H^{2n-2}(S_{2n-2})$. Pour prouver le Lemme 2 il nous faut donc montrer que $m = \pm m'$.

Soit $E$ l'espace des chemins de $D$ d'origine fixée, $\Omega'_n$ l'espace des lacets de $D$ (rétractile sur $\Omega_n$), $E'$ le sous-espace de $E$ formé des chemins dont l'extrémité est dans $S_{2n-1}$. Le couple $(E, E')$ est donc un *espace fibré relatif* de base le couple $(D, S_{2n-1})$ et de fibre $\Omega'_n$. Nous allons calculer $H^{2n}(E, E')$ de deux manières différentes:

(a) Puisque $H^i(E) = 0$ pour $i > 0$, on a $H^{2n}(E, E') \approx H^{2n-1}(E')$; or $E'$ est fibré de fibre $\Omega'_n$ et de base $S_{2n-1}$ ; la "classe caractéristique" de cette fibration est donc un élément de $\pi_{2n-2}(\Omega'_n)$, et, si on identifie ce dernier groupe à $\pi_{2n-2}(\Omega_n)$, il est clair que cette classe caractéristique n'est autre que $f'$. Appliquant alors à $E'$ la suite exacte de Wang on trouve

$$H^{2n-1}(E') \approx Z_{m'}\,, \text{ d'où } \quad H^{2n-2}(E, E') \approx Z_{m'}\,.$$

(b) Soit $(E_r)$ la suite spectrale de cohomologie de l'espace fibré relatif $(E, E')$. On a $E_2^{p,q} = H^p(D, S_{2n-1}) \otimes H^q(\Omega'_n)$. Il en résulte que $E_2^{p,q}$ est nul si $p \neq n, 2n$ et si $q \not\equiv 0 \bmod (n - 1)$. La seule différentielle $d_r$ éventuellement non nulle est donc $d_n$, et on a en particulier $E_n^{p,q} = E_2^{p,q}$. Soit $u$ un générateur de $H^{n-1}(\Omega'_n)$; le groupe $E_n^{n,n-1} = E_2^{n,n-1}$ est un groupe libre de générateur $v \otimes u$, et $E_n^{2n,0} = E_2^{2n,0}$ est un groupe libre de générateur $w \otimes 1$; on a donc $d_n(v \otimes u) = m''\cdot w \otimes 1$, $m''$ étant un certain entier, et on en tire immédiatement $H^{2n}(E, E') = Z_{m''}$.

Comparant (a) et (b) on voit qu'il nous suffit de prouver que $m'' = \pm m$.

[12] N. E. Steenrod. *Cohomology invariants of mappings*. Ann. of Math., **50**, 1949, p. 954–988, §*17*.

Or ceci est immédiat. En effet, nous avons vu au Chapitre II, n° 3 que le cup-product définit un accouplement des suites spectrales de $E$ et de $(E, E')$ dans celle de $(E, E')$ et que les $d_r$ sont des antidérivations vis-à-vis de cet accouplement. Il est clair que l'élément $v \otimes u$ considéré plus haut est le cup-product (au sens de cet accouplement) $(v \otimes 1) \cdot (1 \otimes u)$; comme par ailleurs $d_n(1 \otimes u) = \pm v \otimes 1$ dans la suite spectrale de $E$, on en déduit:

$$d_n((v \otimes 1) \cdot (1 \otimes u)) = (v \otimes 1) \cdot d_n(1 \otimes u) = \pm(v \otimes 1) \cdot (v \otimes 1) = \pm m \cdot w \otimes 1,$$

d'où, en comparant avec (b), $m'' = \pm m$, ce qui achève la démonstration.

## Chapitre V. Compléments

### 1. Résultats préliminaires

Nous retournons à l'étude des endomorphismes $\varphi_q^{i,n}$ de $\pi_i(\mathrm{S}_n)$, définis au Chapitre IV, n° 1.

Proposition 1. *Si $n$ est impair, on a $\varphi_q \circ \varphi_2 = q \cdot \varphi_2$.*

Nous aurons besoin du lemme suivant:

Lemme 1. *Si $n$ est impair, il existe une application de $\mathrm{S}_n \times \cdots \times \mathrm{S}_n$ dans $\mathrm{S}_n$ qui est de type $(2, \cdots, 2)$.*

Comme l'a remarqué H. Hopf, il existe une application $(x, y) \to x \cdot y$ de $\mathrm{S}_n \times \mathrm{S}_n$ dans $\mathrm{S}_n$ qui est de type $(2,1)$; autrement dit, l'application $y \to x \cdot y$ est de degré 1 pour tout $x$, alors que l'application $x \to x \cdot y$ est de degré 2 pour tout $y$. Il en résulte immédiatement que l'application $(x_1, \cdots, x_q) \to x_1 \cdot (x_2 \cdot (\cdots x_q) \cdots))$ de $\mathrm{S}_n \times \cdots \times \mathrm{S}_n$ dans $\mathrm{S}_n$ est de type $(2,2, \cdots, 2,1)$ et, en composant cette application avec une application $\mathrm{S}_n \times \cdots \times \mathrm{S}_n \to \mathrm{S}_n \times \cdots \times \mathrm{S}_n$ de degré 2 sur la dernière sphère et de degré 1 sur les autres, on trouve bien une application du type voulu.

Démontrons maintenant la Proposition 1. Pour cela, soit $\tau$ une application de type $(2, \cdots, 2)$ de $(\mathrm{S}_n)^q$ dans $\mathrm{S}_n$, soit $\sigma$ l'application diagonale $\mathrm{S}_n \to (\mathrm{S}_n)^q$ définie par $\sigma(x) = (x, \cdots, x)$, et soit $\rho = \tau \circ \sigma$; l'application $\rho: \mathrm{S}_n \to \mathrm{S}_n$ est de degré $2q$, et l'homomorphisme $\rho_0: \pi_i(\mathrm{S}_n) \to \pi_i(\mathrm{S}_n)$ coincide donc avec $\varphi_{2q}$.

Identifions $\pi_i(\mathrm{S}_n \times \cdots \times \mathrm{S}_n)$ avec $\pi_i(\mathrm{S}_n) + \cdots + \pi_i(\mathrm{S}_n)$; on a alors $\sigma_0(\alpha) = (\alpha, \cdots, \alpha)$, si $\alpha \in \pi_i(\mathrm{S}_n)$; d'autre part, puisque $\tau$ est de type $(2, \cdots, 2)$, on a $\tau_0(0, \cdots, 0, \alpha, 0, \cdots, 0) = \varphi_2(\alpha)$; il suit de là que:

$$\rho_0(\alpha) = \tau_0 \circ \sigma_0(\alpha) = \tau_0(\alpha, \cdots, \alpha) = \varphi_2(\alpha) + \cdots + \varphi_2(\alpha) = q \cdot \varphi_2(\alpha),$$

d'où, en comparant avec le résultat trouvé plus haut, $\varphi_{2q} = q \cdot \varphi_2$. La Proposition résulte alors de la formule (1.2) du Chapitre IV.

Remarque. Si $n$ est tel qu'il existe une application $\mathrm{S}_n \times \mathrm{S}_n \to \mathrm{S}_n$ de type $(1,1)$, alors le raisonnement précédent conduit à la relation classique $\varphi_q = q$.

Corollaire 1. *Si $n$ est impair et $p$ premier $\neq 2$, la restriction de $\varphi_q$ au $p$-composant de $\pi_i(\mathrm{S}_n)$ coincide avec la multiplication par $q$.*

On a en effet $(\varphi_q - q) \circ \varphi_2 = 0$, et comme la restriction de $\varphi_2$ au $p$-composant de $\pi_i(\mathrm{S}_n)$ est un automorphisme si $p \neq 2$ (Chapitre IV, Corollaire à la Proposition 1), ceci entraîne $\varphi_q - q = 0$.

Corollaire 2. *Soit $x \in \pi_i(\mathrm{S}_n)$ un élément tel que $q \cdot x = 0$ ($n$ étant impair); on a alors $\varphi_{2q}(x) = 0$, et, si $q$ est impair, on a même $\varphi_q(x) = 0$.*

On a $\varphi_{2q}(x) = q \cdot \varphi_2(x) = \varphi_2(q \cdot x) = 0$, ce qui démontre la 1ère partie du Corollaire. Si maintenant $q$ est impair, $x$ est contenu dans la somme directe des $p$-composants de $\pi_i(\mathrm{S}_n)$, $p \neq 2$, et d'après le Corollaire 1 on a $\varphi_q(x) = q \cdot x = 0$.

Corollaire 3. *Si $n$ est impair et $p$ premier, la restriction de $\varphi_p$ au $p$-composant de $\pi_i(\mathrm{S}_n)$, $i > n$, est un endomorphisme nilpotent.*

Résulte du Corollaire 2 ci-dessus.

Remarque. J'ignore si, dans les conditions du Corollaire 2, on a toujours $\varphi_q(x) = 0$; par contre si on ne suppose plus que $n$ est impair c'est inexact: ainsi si l'on prend pour $x$ le composé $\mathrm{S}_8 \to \mathrm{S}_7 \to \mathrm{S}_4$, où $\mathrm{S}_8 \to \mathrm{S}_7$ est essentielle et où $\mathrm{S}_7 \to \mathrm{S}_4$ est la fibration de Hopf, on a $2 \cdot x = 0$ et cependant $\varphi_2(x) \neq 0$.[13] Plus généralement d'ailleurs il serait intéressant de voir ce qui subsiste des résultats précédents lorsque $n$ est pair; il est facile de traiter le cas des $p$-composants, $p \neq 2$, grâce au Corollaire 2 de la Proposition 5, Chapitre IV (où l'on prend $u = [i_n, i_n]$); cela montre par exemple que le Corollaire 3 est valable si $n$ est pair et $p \neq 2$; mais pour $p = 2$ ce procédé ne donne aucun renseignement.

## 2. Applications d'un polyèdre dans une sphère de dimension impaire

Proposition 2. *Soit $K$ un polyèdre fini, $n$ un entier impair, $x$ un élément de $H^n(K, Z)$. Il existe un entier $N \neq 0$ et une application $f: K \to \mathrm{S}_n$ tels que $f^*(u) = N \cdot x$, $u$ désignant la classe fondamentale de $H^n(\mathrm{S}_n, Z)$.*

Soit $K_q$ le squelette de dimension $q$ du polyèdre $K$; d'après un théorème bien connu de H. Hopf, il existe une application $f_n: K_{n+1} \to \mathrm{S}_n$ telle que $f_n^*(u) = x$ (en convenant d'identifier $H^n(K)$ à $H^n(K_{n+1})$).

Si $i > n$, le groupe $\pi_i(\mathrm{S}_n)$ est un groupe *fini*; soit $r_i$ le nombre de ses éléments, et soit $g_i: \mathrm{S}_n \to \mathrm{S}_n$ une application de degré $2r_i$. Quel que soit $\alpha \in \pi_i(\mathrm{S}_n)$, on a $g_i \circ \alpha = 0$, d'après le Corollaire 2 à la Proposition 1.

Ceci posé, nous allons définir des applications $f_i: K_{i+1} \to \mathrm{S}_n$, $i \geqq n$, telles que $f_n$ soit l'application précédemment construite, et que la restriction de $f_i$ à $K_i$ coincide avec $g_i \circ f_{i-1}$; supposons $f_{i-1}$ connu, et soit $e$ un simplexe de dimension $i + 1$ de $K$; la restriction de $f_{i-1}$ à la frontière de ce simplexe définit un élément $\alpha_e \in \pi_i(\mathrm{S}_n)$, et la restriction de $g_i \circ f_{i-1}$ définit l'élément $g_i \circ \alpha_e$, c'est-à-dire 0, comme on l'a vu. Ceci signifie que $g_i \circ f_{i-1}$ peut se prolonger à $K_{i+1}$, et l'on obtient ainsi l'application $f_i$ cherchée.

L'existence des $f_i$ étant démontrée, posons $f = f_{m-1}$, où $m$ désigne la dimension de $K$. Je dis que l'application $f$ répond aux conditions posées. En effet, on a $f_i^*(u) = f_{i-1}^* \circ g_i^*(u) = 2r_i \cdot f_{i-1}^*(u)$, d'où finalement $f^*(u) = N \cdot x$, avec:

$$N = 2^{m-n-1} \cdot \prod_{i=n+1}^{i=m-1} r_i .$$

Corollaire. *Soient $K$ un polyèdre fini, $k$ un corps de caractéristique nulle. Pour tout $x \in H^n(K, k)$, $n$ impair, il existe $f: K \to \mathrm{S}_n$ et $u \in H^n(\mathrm{S}_n, k)$ tels que $f^*(u) = x$.*

[13] On peut montrer que $\varphi_2(x)$ est la suspension de $\mathrm{S}_7 \to \mathrm{S}_6 \to \mathrm{S}_3$, où $\mathrm{S}_7 \to \mathrm{S}_6$ est essentielle, et où $\mathrm{S}_6 \to \mathrm{S}_3$ est l'élément de Blakers-Massey. La non-nullité de cet élément résulte alors par exemple de [7], §4.

Supposons que l'on ait dim $K \leqq n + 2p - 3$, $p$ étant premier; les nombres $r_i$ $(n + 1 \leqq i \leqq m - 1)$ sont alors premiers à $p$ d'après la Proposition 11 du Chapitre IV, et le nombre $N$ n'est donc pas divisible par $p$. Il résulte de là que *le Corollaire précédent est valable si la caractéristique de* $k$ *est* $p$, *à condition de supposer* dim $K \leqq n + 2p - 3$.

On peut étendre les résultats qui précèdent dans d'autres directions. Signalons par exemple la Proposition suivante (valable que $n$ soit pair ou impair):

PROPOSITION 2'. *Supposons que* dim $K \leqq 2n - 2$ *et désignons par* $\mathcal{C}$ *la classe des groupes finis. L'homomorphisme* $\pi^n(K) \rightarrow H^n(K, Z)$ *est alors un* $\mathcal{C}$*-isomorphisme sur.*

Cette Proposition se démontre immédiatement en utilisant *la suite spectrale de cohomotopie*[14] du polyèdre $K$. Nous n'insistons pas là-dessus, d'autant plus que la Proposition 2 elle-même est très vraisemblablement valable pour $n$ pair, à condition de supposer que le cup-carré de $u$ est un élement d'ordre fini de $H^{2n}(K, Z)$.

## 3. Groupes de Lie et produits de sphères

Dans toute la suite de ce Chapitre, $G$ désignera un *groupe de Lie semi-simple, compact, et connexe.* Si $k$ est un corps de caractéristique nulle, d'après un résultat classique de H. Hopf, l'algèbre de cohomologie $H^*(G, k)$ est une algèbre extérieure engendrée par des éléments $x_1, \cdots, x_l$ de dimensions impaires $n_1, \cdots, n_l$; l'entier $l$ est le *rang* de $G$, et l'on a $n_1 + n_2 + \cdots + n_l = n$, *dimension* de $G$.

Soit $X$ le produit direct des sphères de dimension $n_1, \cdots, n_l$; le théorème de Hopf que nous venons de rappeler équivaut à dire que $H^*(G, k) \approx H^*(X, k)$. Nous allons préciser ceci:

PROPOSITION 3. *Avec les hypothèses précédentes, il existe une application continue* $f: G \rightarrow X$ *telle que* $f^*$ *soit un isomorphisme de* $H^i(X, k)$ *sur* $H^i(G, k)$ *pour tout* $i$.

Pour tout $i$, $1 \leqq i \leqq l$, choisissons une application $f_i: G \rightarrow \mathbf{S}_{n_i}$, et un élément $u_i \in H^{n_i}(\mathbf{S}_{n_i}, k)$ tels que $f_i^*(u_i) = x_i$, ce qui est possible d'après le Corollaire à la Proposition 2. Soit $f: G \rightarrow X = \prod \mathbf{S}_{n_i}$ l'*application produit* des applications $f_i$; il est clair que $f^*$ est un isomorphisme de $H^*(X, k)$ sur $H^*(G, k)$.

COROLLAIRE 1. *Soit* $\mathcal{C}$ *la classe des groupes finis. Toute application* $f: G \rightarrow X$ *vérifiant les conditions de la Proposition* 3 *définit un* $\mathcal{C}$*-isomorphisme de* $\pi_i(G)$ *sur* $\pi_i(X)$ *pour tout* $i \geqq 0$.

Soit $\bar{G}$ le revêtement universel de $G$; c'est un groupe semi-simple compact, et $H^*(\bar{G}, k) \approx H^*(G, k)$. Ceci montre qu'il suffit de prouver le Corollaire lorsque $G$ est simplement connexe; mais dans ce cas il résulte du Théorème de J. H. C. Whitehead et de la Proposition 1 du Chapitre III.

COROLLAIRE 2. *Pour tout* $q \geqq 0$, *le rang de* $\pi_q(G)$ *est égal au nombre des entiers* $i$ *tels que* $n_i = q$. *En particulier,* $\pi_q(G)$ *est fini si* $q$ *est pair.*

Vu le Corollaire 1, il suffit de prouver ceci pour $X$ au lieu de $G$. Mais on a:

---

[14] Pour tout ce qui concerne les groupes de cohomotopie $\pi^n(K)$, ainsi que la suite spectrale attachée à la filtration de $K$ par les squelettes $K_q$, nous renvoyons le lecteur à E. Spanier. *Borsuk's cohomotopy groups.* Ann. of Math., **50**, 1949, p. 203–245.

$\pi_q(X) = \pi_q(\mathbf{S}_{n_1}) + \cdots + \pi_q(\mathbf{S}_{n_l})$, et le Corollaire résulte alors de la finitude des groupes $\pi_i(\mathbf{S}_n)$ pour $i > n$, $n$ impair.

REMARQUE. Le Corollaire précédent se généralise à tout espace $G$ tel que $H^*(G, k)$ soit le produit tensoriel d'une algèbre extérieure et d'une algèbre de polynômes; cela se démontre immédiatement en utilisant la méthode de la Note [4], I, ainsi, que [8], VI, Proposition 4; Cf. [4], II, Proposition 3.

## 4. Nombres premiers réguliers pour un groupe de Lie donné

Nous conservons les hypothèses et notations du numéro précédent. Nous allons poursuivre la comparaison entre le groupe de Lie $G$ et le produit de sphères $X$.

DÉFINITION. *Un nombre premier $p$ est dit régulier pour $G$ s'il existe $f: X \to G$ tel que $f_*$ soit un isomorphisme de $H_i(X, Z_p)$ sur $H_i(G, Z_p)$ pour tout $i \geqq 0$.*[15]

Une telle application $f$ sera dite une *p-équivalence.*

On notera que, si $G$ a de la $p$-torsion (i.e. a un coefficient de torsion divisible par $p$), $p$ est irrégulier pour $G$, car la dimension sur le corps $Z_p$ de $H_*(G, Z_p)$ est alors strictement supérieure à celle de $H_*(X, Z_p)$. La réciproque est inexacte en général, comme on le verra sur les exemples du n° 5.

Le but de ce numéro et du suivant est de déterminer, dans la mesure du possible, les nombres premiers réguliers pour un groupe de Lie donné. La Proposition suivante ramène cette recherche au cas d'un groupe simplement connexe:

PROPOSITION 4. *Soit $\bar{G}$ un revêtement de $G$, et soit $H$ le noyau de la projection $q: \bar{G} \to G$. Pour qu'un nombre premier soit régulier pour $G$, il faut et il suffit qu'il soit régulier pour $\bar{G}$ et qu'il ne divise pas l'ordre de $H$.*

(Rappelons que $H$ est un sous-groupe fini du centre de $\bar{G}$).

Supposons d'abord $p$ régulier pour $G$; $G$ n'a donc pas de $p$-torsion, et, puisque $H_1(G)$ admet le groupe $H$ comme groupe quotient, il s'ensuit que $p$ ne divise pas l'ordre de $H$; l'homomorphisme $q_* : H_i(\bar{G}, Z_p) \to H_i(G, Z_p)$ est alors un isomorphisme sur pour tout $i \geqq 0$, d'après un resultat élémentaire de la théorie des revêtements. Soit $f: X \to G$ une $p$-équivalence; puisque $\pi_1(X) = 0$, $f$ se relève en $\bar{f}: X \to \bar{G}$ qui est aussi une $p$-équivalence, d'après ce que nous venons de voir sur $q_*$.

Réciproquement, s'il existe une $p$-équivalence $\bar{f}: X \to \bar{G}$, et si $p$ ne divise pas l'ordre de $H$, l'application $f = q \circ \bar{f}: X \to G$ est une $p$-équivalence et $p$ est régulier pour $G$.

L'intérêt de la notion de nombre premier régulier provient de la Proposition suivante:

PROPOSITION 5. *Soient $p$ un nombre premier régulier pour $G$, $\mathcal{C}$ la classe des groupes finis d'ordre premier à $p$. Pour tout $q \geqq 0$, le groupe $\pi_q(G)$ est $\mathcal{C}$-isomorphe à la somme directe des groupes $\pi_q(\mathbf{S}_{n_i})$, $1 \leqq i \leqq l$.*

En raison de la Proposition 4, on peut se borner au cas où $\pi_1(G) = 0$. Soit

---

[15] **Il serait intéressant de savoir si le fait que $p$ est régulier entraîne l'existence d'une $p$-équivalence $g: G \to X$. Plus généralement est-il possible de bâtir une théorie du "$\mathcal{C}$-type d'homotopie" d'un espace?**

$f: X \to G$ une $p$-équivalence; puisque $\pi_1(X) = 0$, et que $\pi_1(G) = \pi_2(G) = 0$[16], on peut appliquer le théorème de J. H. C. Whitehead, et l'homomorphisme $f_0: \pi_q(X) \to \pi_q(G)$ est un $\mathcal{C}$-isomorphisme sur pour tout $q \geqq 0$. La Proposition résulte alors de ce que $\pi_q(X) = \pi_q(\mathbf{S}_{n_1}) + \cdots + \pi_q(\mathbf{S}_{n_l})$.

COROLLAIRE. *Si $p$ est régulier pour $G$, le $p$-composant de $\pi_q(G)$ est isomorphe à la somme directe des $p$-composants des $\pi_q(\mathbf{S}_{n_i})$, $1 \leqq i \leqq l$.*

Nous allons maintenant montrer que tout nombre premier suffisamment grand est régulier pour $G$. De façon plus précise:

PROPOSITION 6. *Soit $p$ un nombre premier tel que $G$ n'ait pas de $p$-torsion et que l'on ait $n_i \leqq 2p - 1$ pour $1 \leqq i \leqq l$. Alors $p$ est régulier pour $G$.*

Puisque $G$ n'a pas de $p$-torsion, l'ordre de $\pi_1(G)$ n'est pas divisible par $p$, et en appliquant la Proposition 4, on voit qu'on peut supposer $G$ simplement connexe.

D'autre part, d'après [1], §20, Remarque 1, l'*algèbre* $H_*(G, Z_p) = H_*(G) \otimes Z_p$ (munie du produit de Pontrjagin) est une algèbre extérieure engendrée par des éléments $z_1, \cdots, z_l$ de dimensions $n_1, \cdots, n_l$; nous noterons $I_k$ la *sous-algèbre* de $H_*(G) \otimes Z_p$ engendrée par les éléments de dimension inférieure ou égale à $k$. De même, nous poserons $X_k = \prod_{n_i \leqq k} \mathbf{S}_{n_i}$; on a: $H_*(X_k) \otimes Z_p \approx I_k$.

Nous allons maintenant construire des applications $f_k: X_k \to G$ qui vérifient la condition:

(a) *L'image de $(f_k)_*: H_*(X_k) \otimes Z_p \to H_*(G) \otimes Z_p$ est $I_k$.*

Il est clair que (a) entraîne:

(b) *$(f_k)_*$ est biunivoque.*

Une fois les $f_k$ construites, on posera $f = f_{n_l}$, et l'on obtiendra bien une $p$-équivalence.

Tout revient donc à construire les $f_k$, ce qui se fait par récurrence sur l'entier $k$; puisque $X_k = X_{k-1}$ si $k$ n'est égal à aucun des $n_i$, il suffit de s'occuper du cas où $k$ est égal à l'un des $n_i$; si $m$ désigne le nombre des entiers $i$ tels que $n_i = k$, on a:

$$X_k = X_{k-1} \times (\mathbf{S}_k)_1 \times (\mathbf{S}_k)_2 \times \cdots \times (\mathbf{S}_k)_m .$$

Soit $G'$ le mapping-cylinder de $f_{k-1}: X_{k-1} \to G$; puisque $f_{k-1}$ vérifie la condition (a), on a $H_i(G', X_{k-1}; Z_p) = 0$ pour $i < k$; appliquant le Théorème d'Hurewicz relatif (ce qui est licite puisque $\pi_1(G) = \pi_2(G) = 0$) avec pour classe $\mathcal{C}$ la classe des groupes finis d'ordre premier à $p$, on voit que $\pi_k(G', X_{k-1}) \to H_k(G', X_{k-1})$ est un $\mathcal{C}$-isomorphisme sur, donc que $\pi_k(G', X_{k-1}) \otimes Z_p \to H_k(G', X_{k-1}) \otimes Z_p$ est un isomorphisme sur; comme $H_{k-1}(G', X_{k-1}) \in \mathcal{C}$, on a $H_k(G', X_{k-1}) \otimes Z_p = H_k(G', X_{k-1}; Z_p)$. D'autre part, puisque $k$ est égal à l'un des $n_i$, on a $k \leqq 2p - 1$, et il résulte de la Proposition 11 du Chapitre IV que $\pi_k(X_{k-1})$ et $\pi_{k-1}(X_{k-1})$ appartiennent à $\mathcal{C}$; d'où, en appliquant la suite exacte d'homotopie, le fait que $\pi_k(G) \otimes Z_p \to \pi_k(G', X_{k-1}) \otimes Z_p$ est un isomorphisme sur. Considérons alors le

[16] Le fait que $\pi_2(G) = 0$ pour tout groupe de Lie est dû à Elie Cartan. *Voir: la Topologie des groupes de Lie,* Paris, Hermann, 1936.

diagramme commutatif suivant, où la ligne inférieure est une suite exacte:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \pi_k(G) \otimes Z_p & \rightarrow & \pi_k(G', X_{k-1}) \otimes Z_p & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ H_k(X_{k-1}) \otimes Z_p & \rightarrow & H_k(G) \otimes Z_p & \rightarrow & H_k(G', X_{k-1}) \otimes Z_p & \rightarrow & H_{k-1}(X_{k-1}) \otimes Z_p . \end{array}$$

Il résulte de la propriété (b) et du diagramme précédent que l'homomorphisme $\pi_k(G) \otimes Z_p \rightarrow H_k(G) \otimes Z_p$ est biunivoque et que son image $\Sigma_k$ est supplémentaire dans $H_k(G) \otimes Z_p$ de l'image de $H_k(X_{k-1}) \otimes Z_p$ ; d'après (a) cette dernière image n'est autre que $I_{k-1} \cap (H_k(G) \otimes Z_p)$. La dimension de $\Sigma_k$ est donc égale à $m$, et si $y_1, \cdots, y_m$ forment une base de $\Sigma_k$, la sous-algèbre de $H_*(G) \otimes Z_p$ engendrée par $I_{k-1}$ et les $y_i$ n'est autre que $I_k$.

Soient $g_i\colon \mathbf{S}_k \rightarrow G$ des représentants des $y_i$, $1 \leqq i \leqq m$. Puisque $X_k = X_{k-1} \times (\mathbf{S}_k)_1 \times \cdots \times (\mathbf{S}_k)_m$, on peut définir une application $f_k\colon X_k \rightarrow G$ en posant:

$$f_k(a,\ b_1, \cdots, b_m) = f_{k-1}(a)\cdot g_1(b_1) \cdots g_m(b_m),\ a \in X_{k-1},\ b_i \in (\mathbf{S}_k)_i ,$$

le produit étant celui qui définit la structure de groupe de $G$. Par définition même du produit de Pontrjagin, l'image de $(f_k)_*$ est la sous-algèbre de $H_*(G) \otimes Z_p$ engendrée par l'image de $(f_{k-1})_*$ et par les images des $(g_i)_*$, c'est-à-dire $I_k$, d'après ce qu'on vient de voir. L'application $f_k$ vérifie donc (a), ce qui achève la démonstration.

Remarques. (1) Signalons brièvement comment on peut prouver la Proposition précédente de façon légèrement différente, en utilisant les résultats du n° 2: si $Y$ désigne le squelette de dimension $n_l + 1$ de $G$ (supposé triangulé) on construit $h\colon Y \rightarrow X$ telle que $h_*\colon H_i(Y) \otimes Z_p \rightarrow H_i(X) \otimes Z_p$ soit un isomorphisme sur pour $i \leqq n_l$ ; c'est possible du fait que $n_l + 1 \leqq 2p$. Comme $\pi_i(Y) = \pi_i(G)$ pour $i \leqq n_l$, l'application $h$ donne assez de renseignements sur les $\pi_i(G)$ pour que l'on puisse être assuré de l'existence d'éléments $g_i \in \pi_{n_i}(G)$ dont les images dans $H_*(G) \otimes Z_p$ constituent un système de générateurs de l'algèbre $H_*(G) \otimes Z_p$. On prend alors pour $f$ le produit (au sens de $G$) des $g_i$.

(2) Supposons que $G$ soit un groupe *simple* de dimension $n$, rang $l$; les nombres $n_i$ vérifient alors la propriété de *symétrie*[17] bien connue: $n_1 + n_l = n_2 + n_{l-1} = \cdots = 2n/l$; comme $n_1 = 3$, la condition $n_l \leqq 2p - 1$ équivaut donc à $p \geqq n/l - 1$.

## 5. Groupes classiques

Rappelons que tout groupe simple est de l'un des types $A_l$, $B_l$, $C_l$, $D_l$, $G_2$, $F_4$, $E_6$, $E_7$, $E_8$, les quatre premiers types étant dits *classiques*, les cinq derniers *exceptionnels*. Le tableau suivant indique pour chacun de ces types la valeur de la dimension $n$, de $n/l - 1$, et (dans le cas classique) indique le représentant

[17] *Voir* au sujet de cette symétrie H. S. M. Coxeter. *The product of the generators of a finite group generated by reflections*. Duke Math. J., **18**, 1951, p. 765–782.

simplement connexe:

$$\begin{array}{llll}
A_l - SU(l+1) & -n = l(l+2) & -n/l - 1 = l+1 \\
B_l - Spin(2l+1) & -n = l(2l+1) & -n/l - 1 = 2l \\
C_l - Sp(l) & -n = l(2l+1) & -n/l - 1 = 2l \\
D_l - Spin(2l) & -n = l(2l-1) & -n/l - 1 = 2l-2 \\
G_2 - n = 14 & -n/l - 1 = 6 & \\
F_4 - n = 52 & -n/l - 1 = 12 & \\
E_6 - n = 78 & -n/l - 1 = 12 & \\
E_7 - n = 133 & -n/l - 1 = 18 & \\
E_8 - n = 248 & -n/l - 1 = 30. &
\end{array}$$

Nous allons voir que, si $G$ est classique, on peut démontrer une réciproque de la Proposition 6:

PROPOSITION 7. *Soit $G$ un groupe simple, compact, connexe, classique, et simplement connexe, de dimension $n$ et de rang $l$. Pour qu'un nombre premier $p$ soit régulier pour $G$, il faut et il suffit que $p \geqq n/l - 1$.*

*Suffisance.* D'après la Proposition 6 et la Remarque 2 qui la suit, il suffit de voir que $G$ n'a pas de $p$-torsion si $p \geqq n/l - 1$; or cela résulte immédiatement de la détermination de la torsion des groupes classiques due à C. Ehresmann et A. Borel.[18]

*Nécessité.* Nous devons montrer que, si $p < n/l - 1$, $p$ est irrégulier pour $G$.

(a) *Cas de $SU(l+1)$.*

Il faut montrer que tout $p \leqq l$ est irrégulier. Or il résulte de la Note [2] que, sous cette hypothèse, l'opération $St_p^{2p-2}$ de Steenrod transforme le générateur de $H^3(G) \otimes Z_p$ en un élément non nul; comme les opérations de Steenrod commutent avec $f^*$, et qu'elles sont nulles dans $H^*(X) \otimes Z_p$, il s'ensuit bien que $p$ est irrégulier pour $G$.

(b) *Cas de $Sp(l)$.*

Le cas de $p \neq 2$ se traite comme précédemment. Reste à voir que 2 est irrégulier pour $Sp(l)$ si $l \geqq 2$; d'après le Corollaire à la Proposition 5, il suffit de faire voir que le 2-composant de $\pi_6(Sp(l))$ n'est pas isomorphe à celui de $\pi_6(\mathbf{S}_3)$, et il suffit d'examiner le cas $l = 2$. Or on a $Sp(2)/\mathbf{S}_3 = \mathbf{S}_7$, d'où la suite exacte $\pi_7(\mathbf{S}_7) \to \pi_6(\mathbf{S}_3) \to \pi_6(Sp(2)) \to 0$. Tout revient donc à montrer que le 2-composant de la classe caractéristique $\gamma \in \pi_6(\mathbf{S}_3)$ de la fibration $Sp(2)/\mathbf{S}_3 = \mathbf{S}_7$ n'est pas nul. Or ceci est bien exact, car l'élément $\gamma$ n'est autre que l'élément de Blakers-Massey.

(c) *Cas de $Spin(2l)$ et de $Spin(2l+1)$.*

Le cas de $p \neq 2$ se traite comme pour $SU(l+1)$, et il reste à voir que 2 est irrégulier pour $Spin(n)$, si $n \geqq 5$. Pour $n = 5$, cela résulte de ce que $Spin(5) = Sp(2)$; pour $n = 6$, de ce que $Spin(6) = SU(4)$; pour $n \geqq 7$, de ce que $Spin(n)$ a de la 2-torsion (A. Borel, loc. cit.).

---

[18] *Sur la cohomologie des variétés de Stiefel et de certains groupes de Lie.* C. R. Acad. Sci. Paris, **232,** 1951, p. 1628–1630.

Remarques. (1) La Proposition précédente est valable sans supposer $G$ simplement connexe, à condition d'exclure le groupe $SO(3)$.

(2) Il serait intéressant de voir si la Proposition 7 peut s'étendre aux groupes exceptionnels; le cas du groupe $G_2$ semble le plus facile: on montre aisément que 2 et 5 sont irréguliers pour $G_2$ (car $G_2$ a de la 2-torsion, et l'opération $St_5^8$ a un effet non nul sur $H^3(G_2) \otimes Z_5$), et que tout nombre premier $\geqq 7$ est régulier (Proposition 6). Pour vérifier la Proposition 7 dans ce cas, il faudrait donc montrer que 3 est irrégulier; on voit d'ailleurs aisément que cela équivaut à montrer que le 3-composant de $\pi_{10}(G_2)$ est nul.

Paris

## Bibliographie

[1]. A. Borel. *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts*. Ann. of Math., **57** (1953), p. 115–207.

[2]. A. Borel et J-P. Serre. *Détermination des p-puissances réduites de Steenrod dans la cohomologie des groupes classiques. Applications*. C. R. Acad. Sci. Paris, **233,** 1951, p. 680–682.

[3]. H. Cartan and S. Eilenberg. *Homological algebra*. A paraître.[19]

[4]. H. Cartan et J-P. Serre. *Espaces fibrés et groupes d'homotopie*. I. C. R. Acad. Sci. Paris, **234,** 1952, p. 288–290; II, ibid., p. 393–395.

[5]. S. Eilenberg and S. MacLane. *Relations between homology and homotopy groups of spaces*. Ann. of Math., **46,** 1945, p. 480–509.

[6]. H. Hopf. *Ueber die Bettischen Gruppen, die zu einer beliebigen Gruppe gehören*. Comment. Math. Helv., **17,** 1944, p. 39–79.

[7]. P. Hilton. *Suspension theorems and generalized Hopf invariant*. Proc. London Math. Soc., **1,** 1951, p. 462–493.

[8] J-P. Serre. *Homologie singulière des espaces fibrés. Applications*. Ann. of Math., **54,** 1951, p. 425–505.

[9]. J-P. Serre. *Sur la suspension de Freudenthal*. C. R. Acad. Sci. Paris, **234,** 1952, p. 1340–1342.

[10]. G. W. Whitehead. *On spaces with vanishing low-dimensional homotopy groups*. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **34,** 1948, p. 207-211.

[11]. G. W. Whitehead. *A generalization of the Hopf invariant*. Ann. of Math., **51,** 1950, p. 192–237.

[12]. G. W. Whitehead. *On the Freudenthal theorems*. Ann. of Math., **57** (1953), p. 209–228

[13]. J. H. C. Whitehead. *Combinatorial Homotopy* I. Bull. Amer. Math. Soc., **55,** 1949 p. 213–245.

---

[19] Cf. Eilenberg-Steenrod. Foundations of algebraic topology.