

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

JEAN-MARC CORDIER

Sur la notion de diagramme homotopiquement cohérent

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome
23, n° 1 (1982), p. 93-112

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1982__23_1_93_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA NOTION DE DIAGRAMME HOMOTOPIQUEMENT COHÉRENT

par Jean-Marc CORDIER

INTRODUCTION

Ce travail a pour origine l'étude de J. W. Gray [G] sur le lien existant entre la notion de lax-limite d'un 2-foncteur et la notion de limite homotopique d'un foncteur simplicial, lié à l'intérêt de l'auteur pour la théorie de la forme forte des compacts. La différence entre la théorie de la forme forte [E-H] et la théorie de la forme repose sur la distinction entre $Ho(Top^{\mathcal{A}})$, catégorie localisée des \mathcal{A} -diagrammes par les morphismes qui sont des équivalences d'homotopie à chaque niveau, et $Ho(Top)^{\mathcal{A}}$, catégorie des \mathcal{A} -diagrammes dans la catégorie d'homotopie. Le problème en vue d'une caractérisation catégorique de la forme forte dans le même esprit que la caractérisation des théories de formes donnée dans [B-C, 1] repose sur une bonne description de cette catégorie localisée.

Suivant R. M. Vogt [V], $Ho(Top^{\mathcal{A}})$ est représentée par la catégorie des morphismes homotopiquement cohérents entre diagrammes homotopiquement cohérents. La formulation donnée par R. M. Vogt des diagrammes homotopiquement cohérents se définit à partir de l'objet monoïde dans Top :

$$\left[\begin{array}{l} [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1] \quad * \rightarrow [0, 1] \\ (t, t') \mapsto t + t' - tt' \quad * \mapsto 0 \end{array} \right. .$$

Nous montrons que la même formulation de diagramme cohérent, exprimée par rapport à l'objet monoïde dans Top :

$$(\times) \quad \left[\begin{array}{l} [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1] \quad * \rightarrow [0, 1] \\ (t, t') \mapsto \max(t, t') \quad * \mapsto 0 \end{array} \right. ,$$

correspond de façon bijective à la donnée d'un foncteur simplicial de $S(\mathcal{A})$

dans Top_s où Top_s est la catégorie simpliciale définie par Top et $S(\mathcal{U})$ est la catégorie simpliciale associée à \mathcal{U} considérée par Dwyer-Kan [D-K] dans leur étude de la localisation simpliciale.

Nous construisons pour cela une catégorie simpliciale $V(\mathcal{U})$ telle que $Rel_* V(\mathcal{U}) = \mathbb{W}_s(\mathcal{U})$ est la catégorie topologique de Vogt exprimée par rapport à l'objet monoïde (\times) , Rel étant le foncteur réalisation topologique d'un ensemble simplicial. Si $S^+(\mathcal{U})$ est la catégorie simpliciale caractérisant les lax-foncteurs de \mathcal{U} dans Cat , nous avons dans $\mathcal{S}\text{-}Cat$ (catégorie des catégories simpliciales) le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & S^+(\mathcal{U}) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ V(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\sim} & S(\mathcal{U}) \end{array}$$

L'isomorphisme entre $V(\mathcal{U})$ et $S(\mathcal{U})$ apparaît par comparaison avec cette catégorie simpliciale $S^+(\mathcal{U})$.

La notion de diagramme homotopiquement cohérent apparaissant comme la donnée d'un foncteur simplicial de $S(\mathcal{U})$ dans Top_s , nous n'aborderons pas ici le problème de l'indexation, à savoir le foncteur simplicial de $S(\mathcal{U})$ dans $\mathcal{S} = \text{Fonc}(\Delta^{op}, Ens)$ donnant la description des limites homotopiques de diagrammes cohérents de Vogt comme limites simpliciales indexées.

Les détails de cette indexation, ainsi que la comparaison avec l'indexation proposée dans [B-C2] et la construction $\pi_* F$ de G. Segal [Se] paraîtront dans [C].

Je voudrais remercier ici T. Porter pour l'aide apportée au cours de cette étude de la cohérence homotopique et D. Bourn pour les discussions et remarques sur ce sujet.

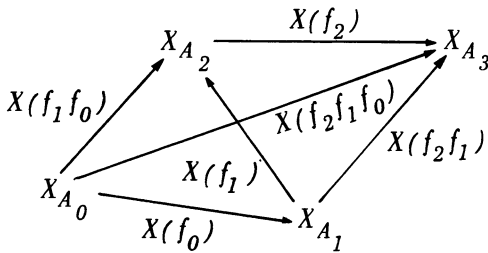
Dans ce texte, nous entendons par Top la catégorie des espaces compactement engendrés. Si $X: \Delta^{op} \rightarrow Ens$ est un ensemble simplicial (X_n, d_n^i, s_n^i) , nous noterons par $X^*: \Delta^{op} \rightarrow Ens$ l'ensemble simplicial $X^* = (X_n, *d_n^i, *s_n^i)$, où $*d_n^i = d_{n-i}^n$ et $*s_n^i = s_{n-i}^n$.

DIAGRAMME HOMOTOPIQUEMENT COHÉRENT 3

L'idée intuitive d'un diagramme homotopiquement cohérent de base une catégorie \mathcal{A} , comme par exemple utilisé dans [P], est relativement simple : à chaque objet A de \mathcal{A} correspond un espace topologique X_A et, à chaque morphisme $f: A \rightarrow B$ un morphisme $X(f): X_A \rightarrow X_B$ tels que pour $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ dans \mathcal{A} , il existe une homotopie

$$H: X_A \times [0, 1] \rightarrow X_C \text{ de } X(g)X(f) \text{ vers } X(gf),$$

pour $A_0 \xrightarrow{f_0} A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3$ dans \mathcal{A} , on a un tétraèdre



avec les homotopies

$$H_0: X(f_1)X(f_0) \overset{\cong}{\simeq} X(f_1 f_0), \quad H_1: X(f_2)X(f_1 f_0) \overset{\cong}{\simeq} X(f_2 f_1 f_0),$$

$$H_2: X(f_2)X(f_1) \overset{\cong}{\simeq} X(f_2 f_1), \quad H_3: X(f_2 f_1)X(f_0) \overset{\cong}{\simeq} X(f_2 f_1 f_0)$$

et une homotopie « plus haute » $H: X_{A_0} \times [0, 1]^2 \rightarrow X_{A_3}$ qui remplit le carré

$$\begin{array}{ccc} X(f_2)X(f_1 f_0) & \xrightarrow{H_1} & X(f_2 f_1 f_0) \\ X(f_2)H_0 \uparrow & H & \uparrow H_3 \\ X(f_2)X(f_1)X(f_0) & \xrightarrow{H_2 X(f_0)} & X(f_2 f_1)X(f_0) \end{array}$$

et ainsi de suite pour les dimensions plus hautes.

On peut évidemment ici faire le parallèle avec la notion de lax-foncteur d'une catégorie \mathcal{A} dans une 2-catégorie \mathcal{C} , un lax-foncteur de \mathcal{A} vers \mathcal{C} étant la donnée : pour chaque objet A de \mathcal{A} d'un objet X_A de \mathcal{C} , pour chaque morphisme $f: A \rightarrow B$ d'un 1-morphisme $X(f): X_A \rightarrow X_B$ tels que

$$\text{pour tout objet } A \text{ il existe une 2-cellule } h_A: 1_{X_A} \Rightarrow X(1_A),$$

pour $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ dans \mathcal{A} , il existe une 2-cellule

$$h: X(gf) \Rightarrow X(g)X(f),$$

ces données étant liées par des axiomes de cohérence (voir e. g. [St]).

Une formulation de l'idée de diagramme homotopiquement cohérent a été donnée par Vogt [V] de la façon suivante : Soit \mathcal{Q} une catégorie, $|\mathcal{Q}|$ la classe de ses objets ; on note $T(\mathcal{Q})$ la quasi-catégorie topologique suivante : $|T(\mathcal{Q})| = |\mathcal{Q}|$ et

$$\underline{T}(\mathcal{Q})(A, B) = \coprod_{n \geq 0} \mathcal{Q}^{n+1}(A, B) \times [0, 1]^n,$$

où $\mathcal{Q}^{n+1}(A, B)$ est l'ensemble des suites de morphismes composables (f_0, \dots, f_n) de source A et de but B , muni de la topologie discrète. Un morphisme de $T(\mathcal{Q})$ de source A et de but B est représenté par la suite

$$(f_0, t_1, f_1, \dots, t_n, f_n),$$

la composition de $\underline{T}(\mathcal{Q})(A, B) \times \underline{T}(\mathcal{Q})(B, C)$ dans $\underline{T}(\mathcal{Q})(A, C)$ associant à $((f_0, t_1, \dots, t_n, f_n), (g_0, s_1, \dots, s_m, g_m))$ la suite

$$(f_0, t_1, \dots, f_n, 1, g_0, s_1, \dots, g_m).$$

Soit $\mathbb{W}(\mathcal{Q})$ la catégorie topologique ayant pour objets les objets de \mathcal{Q} et où $\underline{\mathbb{W}}(\mathcal{Q})(A, B)$ est l'espace topologique quotient de $\underline{T}(\mathcal{Q})(A, B)$ par la relation d'équivalence telle que, si $[f_0, t_1, \dots, t_n, f_n]$ est la classe d'équivalence de $(f_0, t_1, \dots, t_n, f_n)$, on ait :

$$[f_0, t_1, \dots, t_n, f_n] = \begin{cases} [f_1, t_2, \dots, t_n, f_n] & \text{si } f_0 = Id \\ [f_0, t_1, \dots, t_{n-1}, f_{n-1}] & \text{si } f_n = Id \\ [f_0, t_1, \dots, f_{i-1}, t_i * t_{i+1}, \dots, t_n, f_n] & \text{si } f_i = Id, \\ & 0 < i < n \\ [f_0, \dots, t_{i-1}, f_i f_{i-1}, \dots, t_n, f_n] & \text{si } t_i = 0, \end{cases}$$

où $t_i * t_{i+1} = t_i + t_{i+1} - t_i t_{i+1}$.

Un diagramme homotopiquement cohérent de base \mathcal{Q} est alors, suivant Vogt, un *Top*-foncteur de $\mathbb{W}(\mathcal{Q})$ dans *Top*.

Une autre façon d'aborder la notion de diagramme cohérent a été

considérée par R.D. Leicht [L] sous le terme de diagramme homotopiquement commutatif. Soit $\tilde{\mathcal{U}}$ une catégorie et pour chaque $g \in \tilde{\mathcal{U}}(A, B)$ soit E_g l'ensemble ordonné ayant pour éléments les g -chaînes, c'est-à-dire les suites notées $\{f_0, \dots, f_n\}$ où

$$(f_0, \dots, f_n) \in \tilde{\mathcal{U}}^{n+1}(A, B) \text{ et } f_0 \dots f_n = g,$$

les g -chaînes différant seulement par l'addition d'identités étant identifiées (par exemple $\{f, Id, g, Id\} = \{f, g\}$); l'ordre est défini comme suit:

$$\begin{aligned} \{f_0, \dots, f_n\} \leq \{h_0, \dots, h_m\} \text{ si } (f_0, \dots, f_n) \text{ s'obtient de } (h_0, \dots, h_m) \\ \text{par «l'insertion de parenthèses», à savoir} \\ \text{s'il existe } i_0 = 0 < i_1 < \dots < i_n < m+1 = i_{n+1} \\ \text{tels que } f_j = h_{i_{j+1}-1} \dots h_{i_j}. \end{aligned}$$

Un diagramme cohérent dans le sens de Leitch est alors la donnée d'un Top -foncteur de la catégorie topologique $\tilde{\mathcal{U}}$ dans Top , où $\tilde{\mathcal{U}}$ est la catégorie topologique ayant les mêmes objets que $\tilde{\mathcal{U}}$ et où

$$\tilde{\mathcal{U}}(A, B) = \coprod_{g \in \tilde{\mathcal{U}}(A, B)} |E_g|,$$

$|E_g|$ étant le polyèdre associé à l'ensemble ordonné E_g . Ainsi si $[n]$ est la catégorie associée à l'ensemble ordonné $0 < 1 < \dots < n$, on a

$$[\tilde{n}](0, n) = [0, 1]^{n-1} = (n-1)\text{-cube.}$$

Il est bien connu que, plutôt que de prendre le polyèdre associé à un ensemble ordonné, on peut d'abord prendre l'ensemble simplicial associé à l'ordre, puis sa réalisation topologique. A la catégorie $\tilde{\mathcal{U}}$ est donc associée une catégorie simpliciale $L(\tilde{\mathcal{U}})$ (catégorie enrichie sur les ensembles simpliciaux), où $|L(\tilde{\mathcal{U}})| = |\tilde{\mathcal{U}}|$ et $L(\tilde{\mathcal{U}})(A, B)$ est l'ensemble simplicial au-dessus de $L(\tilde{\mathcal{U}})(A, B)$ (l'ensemble des g -chaînes pour tout g de A and B) ayant pour m -simplexes l'ensemble des suites ordonnées:

$$x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_m, \text{ où } x_i = \{f_0^i, \dots, f_{n(i)}^i\} \text{ pour } 0 \leq i \leq m \text{ est}$$

une chaîne de A dans B

(à l'objet A correspond la chaîne vide $\{\}_A$).

Le foncteur Rel_s étant un foncteur monoïdal de $\mathcal{S} = \text{Fonc}(\Delta^{op}, \text{Ens})$ dans Top , il s'étend en un foncteur Rel_{s*} de $\mathcal{S}\text{-Cat}$, catégorie des catégories simpliciales, dans Top-Cat , catégorie des catégories topologiques; comme $Rel_{s*} L(\mathcal{U}) = \tilde{\mathcal{U}}$ la donnée d'un diagramme cohérent de \mathcal{U} dans Top à savoir un Top -foncteur de $\tilde{\mathcal{U}}$ dans Top , correspond de façon bijective à la donnée d'un \mathcal{S} -foncteur de $L(\mathcal{U})$ dans Top_s , où $\text{Top}_s = \text{Sin}_* \text{Top}$ est la catégorie simpliciale définie sur Top , Sin est le foncteur monoïdal «comple singulier» de Top dans \mathcal{S} et $\underline{\text{Top}}_s(T, T')$ a pour n -simplexes

$$\underline{\text{Top}}_s(T, T')_n = \text{Top}(T \times \Delta_n, T'),$$

Δ_n étant le n -simplexe standard géométrique.

Récemment W.G. Dwyer et D.M. Kan [D-K] dans leur définition de la localisation simpliciale considèrent la catégorie simpliciale $S(\mathcal{U})$ suivante associée à une catégorie \mathcal{U} . $S(\mathcal{U})$ est la résolution standard de la comonade

$$\begin{array}{ccc} F\mathcal{U} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{U}, & F\mathcal{U} & \xrightarrow{\psi} & F^2\mathcal{U} \\ Ff & \longmapsto & f' & Ff & \longmapsto & F(Ff) \end{array}$$

où $F\mathcal{U}$ est la catégorie libre qui a un générateur Ff pour chaque morphisme f non-identité.

On peut vérifier que, si \mathcal{U} est la catégorie associée à un ensemble partiellement ordonné, alors $S(\mathcal{U})$ et $L(\mathcal{U})$ sont identiques.

L'aspect simplicial que nous venons de présenter se retrouve au niveau de la notion de lax-foncteur d'une catégorie \mathcal{U} dans 2-Cat , la 2-catégorie des catégories, de la façon suivante :

L'adjonction classique graphe sous-jacent-catégorie libre induit un foncteur de Δ^{op} dans la catégorie des endofoncteurs de Cat ; à chaque catégorie \mathcal{U} est associée une catégorie simpliciale $S^+(\mathcal{U})$, où

$$|S^+(\mathcal{U})| = |\mathcal{U}|$$

et $\underline{S^+}(\mathcal{U})(A, B)$, ensemble simplicial au-dessus de

$$S^+(\mathcal{U})(A, B) = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{U}^{n+1}(A, B),$$

est le nerf simplicial de la catégorie $L^+(\mathfrak{U})(A, B)$ ayant pour objets les suites de morphismes composables (f_0, \dots, f_n) de A dans B , les morphismes de (f_0, \dots, f_n) dans (h_0, \dots, h_m) étant donnés par :

$(f_0, \dots, f_n) \sigma (h_0, \dots, h_m)$ est un morphisme si (f_0, \dots, f_n) s'obtient de (h_0, \dots, h_m) par l'opération σ insertion de parenthèses.

Le foncteur C (resp. Ner) catégorisation d'un ensemble simplicial (resp. nerf simplicial d'une catégorie) de \mathfrak{S} dans Cat (resp. de Cat dans \mathfrak{S}) étant un foncteur monoïdal, il s'étend en un foncteur C_* de $\mathfrak{S}\text{-}Cat$ dans Cat (resp. Ner_* de Cat dans $\mathfrak{S}\text{-}Cat$). Il est connu que la donnée d'un lax-foncteur de \mathfrak{U} dans Cat correspond de façon bijective à la donnée d'un 2-foncteur de $L^+(\mathfrak{U})$, 2-catégorie définie par $L^+(\mathfrak{U})(A, B)$ pour tout A et B de $|\mathfrak{U}|$, dans Cat . Comme $S^+(\mathfrak{U}) = Ner_* L^+(\mathfrak{U})$, la donnée d'un lax-foncteur de \mathfrak{U} dans Cat correspond alors de façon bijective à la donnée d'un foncteur simplicial de $S^+(\mathfrak{U})$ dans Cat_s , catégorie simpliciale définie sur Cat où

$$\underline{Cat}_s(\mathcal{C}, \mathcal{C}') = Ner \underline{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C}').$$

Les notions de diagramme cohérent de base une catégorie \mathfrak{U} que nous venons de décrire font intervenir de deux façons les suites de morphismes composables et leurs composés successifs, c'est-à-dire l'introduction de parenthèses dans les suites.

Une première manière, disons «relâchée», est de faire intervenir ces suites indépendamment de la longueur; on obtient alors, pour tout couple (A, B) d'objets de \mathfrak{U} , l'ensemble simplicial $S^+(\mathfrak{U})(A, B)$.

Une deuxième manière, disons «rigide» est de faire intervenir la longueur de ces suites; on obtient alors pour tout couple (A, B) d'objets de \mathfrak{U} un ensemble cosimplicial que nous noterons $\underline{C}(\mathfrak{U})(A, B)$, où

$$\underline{C}(\mathfrak{U})(A, B)^n = \mathfrak{U}^{n+1}(A, B),$$

les morphismes cofaces et codégénérescences étant définis comme suit: soit

$$d_i^n : Ner(\mathfrak{U})_n \rightarrow Ner(\mathfrak{U})_{n-1} \quad \text{et} \quad s_i^n : Ner(\mathfrak{U})_n \rightarrow Ner(\mathfrak{U})_{n+1}$$

les morphismes faces et dégénérescences de l'ensemble simplicial $Ner(\mathcal{U})$;
alors les cofaces

$$d_i^{n+1} : \underline{C}(\mathcal{U})(A, B)^n \rightarrow \underline{C}(\mathcal{U})(A, B)^{n+1}$$

sont données par

$$d_i^{n+1}(f_0, \dots, f_n) = s_i^{n+1}(f_0, \dots, f_n) = (f_0, \dots, f_{i-1}, Id, f_i, \dots, f_n) ;$$

les codégénérescences

$$s_i^{n-1} : \underline{C}(\mathcal{U})(A, B)^n \rightarrow \underline{C}(\mathcal{U})(A, B)^{n-1}$$

sont données par

$$s_i^{n-1}(f_0, \dots, f_n) = d_{i+1}^{n+1}(f_0, \dots, f_n) = (f_0, \dots, f_{i+1}, f_i, \dots, f_n) .$$

Classiquement, si X est un ensemble simplicial, la réalisation topologique $Rel_s X$ de X s'obtient comme la cofin $\int^{[n]} \Delta_n \times X_n$, où X_n est muni de la topologie discrète, par rapport au modèle de Δ dans Top qui à $[n]$ associe Δ_n .

Si X est un ensemble cosimplicial, on peut soit considérer sa réalisation par rapport à ce modèle de Δ dans Top comme la fin

$$\int_{[n]} \underline{Top}(\Delta_n, X^n), \text{ où } X^n \text{ est muni de la topologie discrète}$$

(c'est-à-dire l'objet total de l'espace cosimplicial ainsi défini), soit définir un modèle de Δ^{op} dans Top :

Soit $P_t : \Delta^{op} \rightarrow Top$ l'espace simplicial défini par

$$P_t([n]) = [0, 1]^n$$

les morphismes faces et dégénérescences étant donnés par :

$$d_i^n : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^{n-1} \text{ où}$$

$$d_0^n(t_1, t_2, \dots, t_n) = (t_2, \dots, t_n), \quad d_n^n(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_{n-1}),$$

$$d_i^n(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_{i+1} * t_i, \dots, t_n), \quad 0 < i < n,$$

$$s_i^n : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^{n+1} \text{ où}$$

$$s_i^n(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_i, 0, t_{i+1}, \dots, t_n).$$

DÉFINITION. Soit $X = (X^n, d_i^n, s_i^n)$ un ensemble cosimplicial; on appel-

lera réalisation topologique de X relativement au modèle topologique P_t , l'espace topologique

$$Relc_t(X) = \int^{[n]} [0, 1]^n \times X^n$$

où X^n est muni de la topologie discrète.

La proposition suivante se déduit de façon immédiate :

PROPOSITION 1. Soit \mathcal{A} une catégorie et $\mathbb{W}(\mathcal{A})$ la catégorie topologique de Vogt associée. Alors

$$\underline{\mathbb{W}}(\mathcal{A})(A, B) = Relc_t \underline{C}(\mathcal{A})(A, B).$$

Alors que, dans le cas «relâché», les ensembles simpliciaux $S^+(\mathcal{A})(A, B)$ s'organisent naturellement en une catégorie simpliciale, les ensembles cosimpliciaux $\underline{C}(\mathcal{A})(A, B)$ ne définissent pas une catégorie enrichie sur les ensembles cosimpliciaux; mais en considérant une version simpliciale du modèle topologique P_t , ils s'organisent en une catégorie simpliciale de construction analogue à la catégorie topologique de Vogt.

L'application qui à une catégorie \mathcal{A} associe la catégorie $L(\mathcal{A})$ s'étend en un foncteur L de Cat dans $\mathcal{S}\text{-Cat}$, d'où par restriction en un foncteur de Δ dans $\mathcal{S}\text{-Cat}$. Soit $d: \Delta^{op} \rightarrow \Delta$ le foncteur défini par :

$$d([n]) = [n+1],$$

$$d(\sigma_i^{n-1}) = \delta_{i+1}^{n+1}: [n] \twoheadrightarrow [n+1] \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n-1,$$

$$d(\delta_i^n) = \sigma_i^n: [n+1] \twoheadrightarrow [n] \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n.$$

Ld est alors un foncteur de Δ^{op} dans $\mathcal{S}\text{-Cat}$ qui induit un foncteur P de Δ^{op} dans $Fonc(\Delta^{op}, Ens)$ de la façon suivante :

$$P([n]) = \underline{L}[n+1](0, n+1),$$

les morphismes faces et dégénérescences étant donnés par :

$$d_i^n = L(\sigma_i^n)_{0, n+1} \text{ de } \underline{L}[n+1](0, n+1) \text{ dans } \underline{L}[n](0, n),$$

$$s_i^{n-1} = L(\delta_{i+1}^{n+1})_{0, n} \text{ de } \underline{L}[n](0, n) \text{ dans } \underline{L}[n+1](0, n+1).$$

PROPOSITION 2. Le foncteur $P: \Delta^{op} \rightarrow Func(\Delta^{op}, Ens)$ induit un espace simplicial $([0, 1]^n, d_i^n, s_i^n)$, où

$$d_i^n(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} (t_2, \dots, t_n) & \text{pour } i = 0 \\ (t_1, \dots, \max(t_i, t_{i+1}), \dots, t_n) & \text{pour } 0 < i < n \\ (t_1, \dots, t_{n-1}) & \text{pour } i = n, \end{cases}$$

$$s_i^n(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_i, 0, t_{i+1}, \dots, t_n) \text{ pour } 0 \leq i \leq n.$$

DÉMONSTRATION. De façon générale si \mathcal{Q} est une catégorie associée à un ensemble partiellement ordonné, alors $\underline{L}(\mathcal{Q})(A, B)$ est isomorphe au nerf de la catégorie ayant pour objets les suites

$$(f'_0, \dots, f'_n) \in \mathcal{Q}^{n'+1}(A, B), \text{ où } f'_i \neq Id \text{ pour } 0 \leq i \leq n',$$

les morphismes étant donnés par l'ordre :

$$(f'_0, \dots, f'_n) \leq (h'_0, \dots, h'_m) \text{ s'il existe } \sigma' : [m'] \rightarrow [n'] \text{ tel que,}$$

s' étant l'opérateur codégénérescence

$$\underline{C}(\mathcal{Q})(A, B)^{\sigma'}, \text{ on ait}$$

$$s'(h'_0, \dots, h'_m) = (f'_0, \dots, f'_n).$$

A toute chaîne $\{f_0, \dots, f_n\}$ est associé

$$(f'_0, \dots, f'_n)$$

tel qu'il existe $\delta : [n'] \rightarrow [n]$ tel que, si d est l'opérateur coface associé à δ , on ait :

$$d(f'_0, \dots, f'_n) = (f_0, \dots, f_n).$$

Si $\{f_0, \dots, f_n\} \leq \{h_0, \dots, h_m\}$, la non-existence d'inverse d'un côté nous donne un carré commutatif dans Δ :

$$\begin{array}{ccc} [m'] & \xrightarrow{\delta} & [m] \\ \sigma' \downarrow & & \downarrow \sigma \\ [n'] & \xrightarrow{\delta'} & [n] \end{array}$$

dans lequel, si d et d' sont les opérateurs cofaces associés à δ et δ' , et s et s' les opérateurs codégénérescences associés à σ et σ' , on a :

$$d(h'_0, \dots, h'_m) = (h_0, \dots, h_m), \quad d'(f'_0, \dots, f'_n) = (f_0, \dots, f_n),$$

$$s(h_0, \dots, h_m) = (f_0, \dots, f_n), \quad s'(h'_0, \dots, h'_m) = (f'_0, \dots, f'_n).$$

Si $[I]$ est la catégorie associée à l'ensemble ordonné $0 < I$, il est immédiat que

$$L[\underline{n+1}](0, n+1) \approx \text{Nerf}[I]^n.$$

Le foncteur P est équivalent à l'ensemble bisimplicial $(\Delta[I]^n, d_i^n, s_i^n)$ où, si μ_i pour $1 \leq i \leq n$ est un morphisme de Δ de $[m]$ dans $[I]$, on a

$$d_i^n(\mu_1, \dots, \mu_n) = \begin{cases} (\mu_2, \dots, \mu_n) & \text{pour } i = 0 \\ (\mu_1, \dots, \text{sup}(\mu_i, \mu_{i+1}), \dots, \mu_n) & \text{pour } 0 < i < n \\ (\mu_1, \dots, \mu_{n-1}) & \text{pour } i = n, \end{cases}$$

$$s_i^n(\mu_1, \dots, \mu_n) = (\mu_1, \dots, \mu_i, \bar{0}, \mu_{i+1}, \dots, \mu_n),$$

$\bar{0}$ étant l'application constante sur 0 .

Le foncteur réalisation topologique Rels de $\text{Fonc}(\Delta^{op}, \text{Ens})$ dans Top appliqué à cet ensemble bisimplicial nous donne alors l'espace simplicial $([0, 1]^n, d_i^n, s_i^n)$.

Nous noterons par P_s le foncteur de Δ^{op} dans Top défini par l'espace simplicial précédent et par $\text{Relc}_s(X)$ la réalisation topologique d'un ensemble cosimplicial X par rapport au modèle P_s . Le foncteur topologie discrète sur un ensemble commutant avec les produits finis et les colimites, nous avons, en utilisant la commutation des cofins :

PROPOSITION 3. Soit $X: \Delta \rightarrow \text{Ens}$ un ensemble cosimplicial ; alors

$$\text{Relc}_s(X) = \text{Rels}(\text{Lan}_{\text{Pop}}(X)h^{op}),$$

où $\text{Lan}_{\text{Pop}}(X)$ est l'extension de Kan à gauche de X le long de P^{op} et h le plongement de Yoneda de Δ dans $\text{Fonc}(\Delta^{op}, \text{Ens})$.

Soit \mathcal{U} une catégorie ; si on applique l'extension de Kan précédente à l'ensemble cosimplicial $\underline{C}(\mathcal{U})(A, B)$, nous obtenons un ensemble simplicial que nous noterons $\underline{V}(\mathcal{U})(A, B)$, où

$$\underline{V}(\mathcal{U})(A, B)_m = \int^{[n]} L[\underline{n+1}](0, n+1)_m \times \underline{C}(\mathcal{U})(A, B)^n.$$

Un m -simplexe est donc une classe d'équivalence

$$[v_0 \leq \dots \leq v_m, (f_0, f_1, \dots, f_n)], \text{ où}$$

$$v_i = (0, p_1^i, \dots, p_{r(i)}^i, n+1) \text{ et } 0 < p_1^i < \dots < p_{r(i)}^i < n+1.$$

Les ensembles simpliciaux ainsi définis s'organisent en une catégorie simpliciale $V(\mathfrak{U})$, où $|V(\mathfrak{U})| = |\mathfrak{U}|$, la loi de composition étant donnée au niveau des sommets par :

$$m(A, B, C)_0 : \underline{V}(\mathfrak{U})(A, B)_0 \times \underline{V}(\mathfrak{U})(B, C)_0 \rightarrow \underline{V}(\mathfrak{U})(A, C)_0$$

associe à

$$([v, (f_0, \dots, f_n)], [v', (g_0, \dots, g_n)])$$

l'élément

$$[v * v', (f_0, \dots, f_n, g_0, \dots, g_n)],$$

où, si $v = (0, p_1, \dots, p_r, n+1)$ et $v' = (0, p'_1, \dots, p'_{r'}, n'+1)$, on a

$$v * v' = (0, p_1, \dots, p_r, n+1, p'_1+n+1, \dots, p'_{r'}+n+1, n+n'+2),$$

et au niveau des m -simplexes par :

$$m(A, B, C)_m : \underline{V}(\mathfrak{U})(A, B)_m \times \underline{V}(\mathfrak{U})(B, C)_m \rightarrow \underline{V}(\mathfrak{U})(A, C)_m$$

associe à

$$([v_0 \leq \dots \leq v_m, (f_0, \dots, f_n)], [v'_0 \leq \dots \leq v'_m, (g_0, \dots, g_n)])$$

l'élément

$$[v_0 * v'_0 \leq \dots \leq v_m * v'_m, (f_0, \dots, f_n, g_0, \dots, g_n)].$$

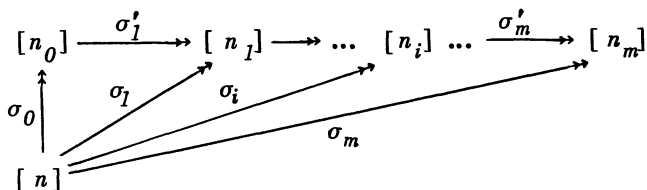
Notons qu'à l'objet A correspond l'identité $[(0, 1), 1_A]$.

Soit \mathfrak{U} une catégorie et $S^+(\mathfrak{U})$ la catégorie simpliciale caractérisant les lax foncteurs de \mathfrak{U} dans $\mathcal{C}at$ comme les foncteurs simpliciaux de $S^+(\mathfrak{U})$ dans Cat_s . Nous allons montrer que d'une manière analogue à la construction de $\underline{V}(\mathfrak{U})(A, B)$, l'ensemble simplicial $\underline{S}^+(\mathfrak{U})(A, B)$ s'obtient à partir de l'ensemble cosimplicial $\underline{C}(\mathfrak{U})(A, B)$ par un «remplacement simplicial».

Soit Δ^+ la sous-catégorie de Δ ayant pour morphismes les surjections croissantes; nous avons le lemme suivant :

LEMME. L'ensemble simplicial $\Delta[1]^n = L[n+1](0, n+1)$ est équivalent aux ensembles simpliciaux $Ner([n]/\Delta^+)$ et $Ner([n]/\Delta^+)^*$, où $[n]/\Delta^+$ est la catégorie comma des objets de Δ^+ sous $[n]$.

DÉMONSTRATION. Soit t^n le morphisme simplicial de $Ner([n]/\Delta^+)$ dans $L[n+1](0, n+1)$ qui, au m -simplexe



associe le m -simplexe $(v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_m)$ défini par: si

$$0 \leq j_1 < \dots < j_{t(i)}^i < n$$

est l'ensemble des j tels que $\sigma_i(j) = \sigma_i(j+1)$, qui détermine σ_i de manière unique, on a

$$v(\sigma_i) = v_i = (0, j_1^i + 1, \dots, j_{t(i)}^i + 1, n+1).$$

t^n est un isomorphisme simplicial dont l'inverse associe à tout m -simplexe $(v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_m)$ de $L[n+1](0, n+1)$ tel que

$$v_i = (0, p_1^i, \dots, p_{t(i)}^i, n+1) \text{ et } 0 < p_1^i < \dots < p_{t(i)}^i < n+1$$

le m -simplexe de $Ner([n]/\Delta^+)$ défini par: $\sigma_i: [n] \rightarrow [n-t(i)]$ est la surjection telle que

$$0 \leq p_1^i - 1 < \dots < p_{t(i)}^i - 1 < n$$

est l'ensemble des j tels que $\sigma_i(j) = \sigma_i(j+1)$, les liens σ'_i étant définis par l'ordre.

La donnée d'une surjection croissante $\sigma_i: [n] \rightarrow [n_i]$ se détermine également de manière unique par l'ensemble $0 \leq p_1 < \dots < p_{n_i} < n$ des p tels que $\sigma_i(p) \neq \sigma_i(p+1)$. On obtient alors un isomorphisme simplicial

$$*t^n: Ner([n]/\Delta^+)^* \rightarrow L[n+1](0, n+1)$$

qui au m -simplexe

$$[n] \longrightarrow [n_0] \longrightarrow \dots \longrightarrow [n_m]$$

associe le m -simplexe $(v_0 \leq \dots \leq v_m)$, où

$$v_i = v^*(\sigma_{m-i}) = (0, p_1 + 1, \dots, p_{n_{m-i}} + 1, n + 1).$$

Notons que les isomorphismes simpliciaux t^n et $*t^n$ de $Ner([n]/\Delta^+)$ et $Ner([n]/\Delta^+)^*$ sur $L[n+1](0, n+1)$ induisent des équivalences fonctorielles entre les foncteurs $Ner(-/\Delta^+)$ et $Ner(-/\Delta^+)^*$ de Δ^{+op} dans $Fonc(\Delta^{op}, Ens)$ et le foncteur P^+ restriction de P à Δ^{+op} .

PROPOSITION 4. Soit \mathcal{U} une catégorie et $\coprod C(\mathcal{U})(A, B)^+$ le remplacement simplicial de $\underline{C}(\mathcal{U})(A, B)^+ : \Delta^+ \rightarrow Ens$; alors l'ensemble simplicial $\underline{S}^+(\mathcal{U})(A, B)$ est tel que

$$\underline{S}^+(\mathcal{U})(A, B) = (\coprod C(\mathcal{U})(A, B)^+)^*.$$

DÉMONSTRATION. De façon générale si F est un foncteur de \mathcal{U} dans une catégorie cocomplète \mathcal{C} , le remplacement simplicial $[B, K]$ est le foncteur $\coprod (-)$ de $Fonc(\mathcal{U}, \mathcal{C})$ dans $Fonc(\Delta^{op}, \mathcal{C})$ qui à F associe l'extension

$$Lan_{Ner(-/\mathcal{U})}(F) h^{op},$$

extension à gauche de F le long de $Ner(-/\mathcal{U})$ composée avec le plongement de Yoneda. On a alors

$$\coprod_m(F) = \int^A \coprod_{Ner(A/\mathcal{U})_m} F A = \coprod_{A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_m} F A_0 ;$$

un m -simplexe de $\underline{S}^+(\mathcal{U})(A, B)$ étant déterminé de manière unique par la donnée d'une suite $(f_0, f_1, \dots, f_{n_m})$ de A dans B et d'un m -simplexe

$$[n_m] \xrightarrow{\sigma_m} [n_m - 1] \dots \xrightarrow{\sigma_1} [n_0]$$

de $Ner(\Delta^+)$, on a par conséquent

$$\underline{S}^+(\mathcal{U})(A, B)_m = [n_m] \rightarrow [n_m - 1] \rightarrow \dots \rightarrow [n_0] \underline{C}(\mathcal{U})(A, B)^{n_m}.$$

A tout m -simplexe

$$([n_m] \xrightarrow{\sigma_m} \dots \xrightarrow{\sigma_1} [n_0]; (f_0, f_1, \dots, f_{n_m}))$$

correspond alors la classe d'équivalence

$$[[n_m] \xrightarrow{id} [n_m] \xrightarrow{\sigma_m} \dots \xrightarrow{\sigma_1} [n_0], (f_0, \dots, f_{n_m})]$$

de

$$\int^{[n]} \epsilon \Delta^+ \text{Ner}([n]/\Delta^+)_m^* \times \mathcal{C}(\mathcal{U})(A, B)^n.$$

L'équivalence entre les foncteurs P^+ et $\text{Ner}(-/\Delta^+)^*$ de Δ^{+op} dans $\text{Fonc}(\Delta^{op}, \text{Ens})$ nous donne alors une comparaison entre $S^+(\mathcal{U})$ et $V(\mathcal{U})$, à savoir un foncteur simplicial de $S^+(\mathcal{U})$ dans $V(\mathcal{U})$.

Soit $S(\mathcal{U})$ la catégorie simpliciale de Dwyer-Kan associée à \mathcal{U} ; nous avons alors une comparaison naturelle entre $S^+(\mathcal{U})$ et $S(\mathcal{U})$ en considérant la description suivante de $S(\mathcal{U})$:

pour A et B appartenant à $|\mathcal{U}|$, $S(\mathcal{U})(A, B)$ a pour sommets les suites (f_0, \dots, f_n) où $f_i \neq id$ pour $0 \leq i \leq n$ et pour m -simplexes, les couples

$$((f_0, \dots, f_{n_m}), [n_m] \xrightarrow{\sigma_m} [n_{m-1}] \rightarrow \dots \xrightarrow{\sigma_1} [n_0])$$

où $f_i \neq id$ pour $0 \leq i \leq n_m$, les morphismes faces et dégénérescences étant définis de la façon suivante:

$d_i^m: S(\mathcal{U})(A, B)_m \rightarrow S(\mathcal{U})(A, B)_{m-1}$ associée à

$$((f_0, \dots, f_{n_m}), [n_m] \xrightarrow{\sigma_m} [n_{m-1}] \rightarrow \dots \xrightarrow{\sigma_1} [n_0])$$

l'élément

- pour $i = 0$, $((f_0, \dots, f_{n_m}), [n_m] \xrightarrow{\sigma_m} [n_{m-1}] \rightarrow \dots \xrightarrow{\sigma_2} [n_1])$,

- pour $0 < i < m$,

$$((f_0, \dots, f_{n_m}), [n_m] \xrightarrow{\sigma_m} [n_{m-1}] \rightarrow \dots \xrightarrow{\sigma_i \sigma_{i+1}} \dots \xrightarrow{\sigma_1} [n_0]),$$

- pour $i = m$, soit $(f'_0, \dots, f'_{n_{m-1}})$ l'élément obtenu de

$$\mathcal{C}(\mathcal{U})(A, B)^{\sigma_m} (f_0, \dots, f_{n_m})$$

en éliminant les identités; nous avons alors la décomposition unique suivante dans Δ :

$$\begin{array}{ccc} [n_{m-1}] & \xleftarrow{\delta_{m-1}} & [n'_{m-1}] \\ \sigma_{m-1} \downarrow & & \downarrow \sigma'_{m-1} \\ [n_{m-2}] & \xleftarrow{\delta_{m-2}} & [n'_{m-2}] \\ \vdots & & \vdots \\ [n_1] & \xleftarrow{\delta_1} & [n'_1] \\ \sigma_1 \downarrow & & \downarrow \sigma'_1 \\ [n_0] & \xleftarrow{\delta_0} & [n'_0] \end{array}$$

où

$$\underline{C}(\underline{\mathcal{Q}})(A, B)^{\delta^{m-1}}(f'_0, \dots, f'_{n'_{m-1}}) = \underline{C}(\underline{\mathcal{Q}})(A, B)^{\sigma^m}(f_0, \dots, f_{n_m});$$

au m -simplexe $((f_0, \dots, f_{n_m}), [n_m] \xrightarrow{\sigma_m} \dots \xrightarrow{\sigma_1} [n_0])$ est alors associé par d_m^m le $(m-1)$ -simplexe

$$((f'_0, \dots, f'_{n'_{m-1}}), [n'_{m-1}] \xrightarrow{\sigma'_{m-1}} \dots \xrightarrow{\sigma'_1} [n'_0]).$$

$s_i^m: \underline{S}(\underline{\mathcal{Q}})(A, B)_m \rightarrow \underline{S}(\underline{\mathcal{Q}})(A, B)_{m+1}$ associe au m -simplexe

$$((f_0, \dots, f_{n_m}), [n_m] \xrightarrow{\sigma_m} [n_{m-1}] \dots \xrightarrow{\sigma_1} [n_0])$$

le $(m+1)$ -simplexe

$$((f_0, \dots, f_{n_m}), [n_m] \xrightarrow{\sigma_m} \dots \rightarrow [n_i] \xrightarrow{id} [n_i] \xrightarrow{\sigma_i} \dots \xrightarrow{\sigma_1} [n_0]).$$

L'opération élimination des identités que nous venons de décrire nous donne une comparaison naturelle de $S^+(\underline{\mathcal{Q}})$ dans $S(\underline{\mathcal{Q}})$.

Nous avons alors la proposition suivante :

PROPOSITION 5. Soit $\underline{\mathcal{Q}}$ une catégorie; les catégories simpliciales $V(\underline{\mathcal{Q}})$ et $S(\underline{\mathcal{Q}})$ sont identiques.

DÉMONSTRATION. Nous allons tout d'abord constater que les catégories sous-jacentes sont isomorphes. L'application de

$$S^+(\underline{\mathcal{Q}})(A, B) \text{ dans } V(\underline{\mathcal{Q}})(A, B)$$

qui à (f_0, \dots, f_n) associe $[(0, 1, \dots, n+1), (f_0, \dots, f_n)]$ se restreint en une application α de $S(\underline{\mathcal{Q}})(A, B)$ dans $V(\underline{\mathcal{Q}})(A, B)$ puisque $S(\underline{\mathcal{Q}})(A, B)$ a pour éléments les suites

$$(f_0, \dots, f_n), \text{ où } f_i \neq id \text{ pour } 0 \leq i \leq n.$$

Soit $[(0, p_1, \dots, p_r, n+1), (f_0, \dots, f_n)] \in V(\underline{\mathcal{Q}})(A, B)$; comme

$$(0, p_1, \dots, p_r, n+1) = L(\delta)_{0, r+1} (0, 1, \dots, r, r+1)$$

pour $\delta: [r+1] \twoheadrightarrow [n+1]$, on a

$$[(0, p_1, \dots, p_r, n+1), (f_0, \dots, f_n)] = [(0, 1, \dots, r, r+1), (g_0, \dots, g_i, \dots, g_r)]$$

où $g_i = f_{p_{i+1}-1} \dots f_{p_i}$ pour $0 \leq i \leq r$, c'est-à-dire si

$$(f_0, \dots, f_n) = A \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B,$$

$$(g_0, \dots, g_r) = A \rightarrow A_{p_1} \rightarrow \dots \rightarrow A_{p_r} \rightarrow B.$$

Soit (g'_0, \dots, g'_r) l'élément obtenu de (g_0, \dots, g_r) en éliminant les identités; alors

$$[(0, 1, \dots, r, r+1), (g_0, \dots, g_r)] = [(0, 1, \dots, r', r'+1), (g'_0, \dots, g'_r)]$$

et l'application qui, à

$$((0, p_1, \dots, p_r, n+1), (f_0, \dots, f_n))$$

associe (g'_0, \dots, g'_r) s'étend en une application b de $V(\underline{\mathcal{U}})(A, B)$ dans $S(\underline{\mathcal{U}})(A, B)$ puisque tout morphisme μ de Δ , s'écrivant de manière unique $\mu = \delta\sigma$, (g'_0, \dots, g'_r) ne se modifie pas sous l'action d'un opérateur $L(\delta_i^n)$ ou $L(\sigma_i^n)$.

Il est facile de voir que les applications $a(A, B)$ et $b(A, B)$ pour $(A, B) \in |\underline{\mathcal{U}}|^2$ s'étendent en des foncteurs de $S(\underline{\mathcal{U}})$ dans $V(\underline{\mathcal{U}})$ et de $V(\underline{\mathcal{U}})$ dans $S(\underline{\mathcal{U}})$ inverses l'un de l'autre.

L'extension de cet isomorphisme au niveau des m -simplexes se fait de la manière suivante: D'après le lemme et la proposition précédente, les foncteurs $Ner(-/\Delta^+)^*$ et P^+ de Δ^{+op} dans $Fonc(\Delta^{op}, Ens)$ étant équivalents, il existe un morphisme simplicial de

$$\underline{S}^+(\underline{\mathcal{U}})(A, B) \text{ dans } \underline{V}(\underline{\mathcal{U}})(A, B)$$

qui, à un m -simplexe de $\underline{S}^+(\underline{\mathcal{U}})(A, B)$ défini par

$$w_m = (f_0, \dots, f_{n_m}) \in \underline{C}(\underline{\mathcal{U}})(A, B)^{n_m}$$

et la suite des surjections

$$[n_m] \xrightarrow{\sigma_m} [n_{m-1}] \rightarrow \dots \xrightarrow{\sigma_1} [n_0]$$

associe le m -simplexe de $\underline{V}(\underline{\mathcal{U}})(A, B)$:

$$[v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_m, (f_0, \dots, f_{n_m})]$$

où $v_m = (0, 1, 2, \dots, n_m + 1)$ et pour $0 \leq i \leq m-1$,

$$v_i = (0, p_1^i + 1, \dots, p_{n_i}^i + 1, n_m + 1)$$

est défini par l'ensemble des p tels que

$$\sigma(p) \neq \sigma(p+1) \text{ pour } \sigma: [n_m] \rightarrow [n_i].$$

On définit de cette façon, par restriction, une application

$$a_m : \underline{S}(\mathcal{Q})(A, B)_m \rightarrow \underline{V}(\mathcal{Q})(A, B)_m.$$

L'application inverse b_m de $\underline{V}(\mathcal{Q})(A, B)_m$ dans $\underline{S}(\mathcal{Q})(A, B)_m$ s'obtient de la comparaison de $S^+(\mathcal{Q})$ dans $S(\mathcal{Q})$, en associant au m -simplexe de $\underline{V}(\mathcal{Q})(A, B)$

$$[v_0 \leq \dots \leq v_m, (f_0, \dots, f_n)],$$

où

$$v_i = (0, p_1^i, \dots, p_{r(i)}^i, n+1) \text{ pour } 0 \leq i \leq m$$

le m -simplexe de $\underline{S}^+(\mathcal{Q})(A, B)$ défini par

$$w_m = (g_0, \dots, g_{r(m)}) = A \rightarrow A \xrightarrow{p_1^m} \dots \rightarrow A \xrightarrow{p_{r(m)}^m} B$$

et la suite de surjections associées à $v'_0 \leq v'_1 \leq \dots \leq v'_m$ telles que

$$v'_m = (0, 1, \dots, r(m), r(m)+1)$$

et

$$[v'_0 \leq v'_1 \leq \dots \leq v'_m, (g_0, \dots, g_{r(m)})] = [v_0 \leq \dots \leq v_m, (f_0, \dots, f_n)].$$

De la Proposition 3, on déduit immédiatement le corollaire suivant :

COROLLAIRE. Soit \mathcal{Q} une catégorie ; la donnée d'un foncteur simplicial de $S(\mathcal{Q})$ dans Top_s est équivalente à la donnée pour tout objet A de \mathcal{Q} d'un espace topologique FA et pour tout couple d'objets (A, B) de \mathcal{Q} , d'une application continue F_{AB} de

$$\underline{T}(\mathcal{Q})(A, B) = \coprod_{n \geq 0} [0, 1]^n \times \mathcal{Q}^{n+1}(A, B)$$

dans $\underline{Top}(FA, FB)$ telle que

$$F_{AB}(f_0, t_1, \dots, t_n, f_n)(x) = \begin{cases} F_{AB}(f_1, t_2, \dots, t_n, f_n)(x) & \text{si } f_0 = Id \\ F_{AB}(f_0, t_1, \dots, \max(t_i, t_{i+1}), \dots, t_n, f_n)(x) & \text{si } f_i = Id, 0 < i < n \\ F_{AB}(f_0, t_1, \dots, t_{n-1}, f_{n-1})(x) & \text{si } f_n = Id \\ F_{AB}(f_0, t_1, \dots, f_i f_{i-1}, \dots, t_n, f_n)(x) & \text{si } t_i = 0 \\ F_{A_i B}(f_i, t_{i+1}, \dots, t_n, f_n)(F_{AA_i}(f_0, t_1, \dots, f_{i-1})(x)) & \text{si } t_i = 1. \end{cases}$$

Pour répondre plus directement au fait qu'un foncteur simplicial de $S(\mathcal{Q})$ dans Top_s détermine un diagramme homotopiquement cohérent, nous

posons la définition suivante :

DÉFINITION. Soit \mathcal{B} une catégorie simpliciale ; on appellera *nerf homotopiquement cohérent de \mathcal{B}* , noté $Ner_{hc} \mathcal{B}$, l'ensemble simplicial ayant pour ensemble des n -simplexes :

$$Ner_{hc}(\mathcal{B})_n = \mathcal{S}\text{-Cat}(L[n], \mathcal{B}).$$

Pour $\mathcal{B} = Top_S$, nous avons alors

$$Ner_{hc}(Top_S)_n = \mathcal{S}\text{-Cat}(L[n], Top_S) = Top\text{-Cat}([\tilde{n}], Top),$$

où $[\tilde{n}] = Rel_{\ast} L[n]$ est la catégorie topologique de Leitch telle que

$$[\tilde{n}](p, q) = [0, 1]^{q-p-1} \text{ et } [\tilde{n}](p, p) = \text{espace topologique vide}.$$

Si \mathcal{A} est une catégorie, la donnée d'un morphisme simplicial m de $Ner(\mathcal{A})$ dans $Ner_{hc}(Top_S)$ correspond alors directement à l'idée de diagramme cohérent présentée au début de ce texte ; en effet, pour chaque objet A , le Top -foncteur $m_0(A) : [\tilde{0}] \rightarrow Top$ définit un espace topologique X , pour chaque $(f, g) = A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2$,

$$m_2(f, g)_{0,1} : [\tilde{2}](0, 2) \rightarrow Top(X_0, X_2)$$

est une homotopie de $m_1(g)m_1(f)$ dans $m_1(gf)$, pour chaque

$$(f, g, h) = A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3,$$

$$m_3(f, g, h)_{0,3} : [\tilde{3}](0, 3) \rightarrow Top(X_0, X_3)$$

est l'homotopie «remplissage» du carré, et ainsi de suite.

On peut alors vérifier la proposition suivante :

PROPOSITION 6. Soit \mathcal{A} une catégorie ; les ensembles

$$\mathcal{S}(Ner(\mathcal{A}), Ner_{hc}(Top_S)) \text{ et } \mathcal{S}\text{-Cat}(S(\mathcal{A}), Top_S)$$

sont en bijection.

Suivant Vogt [V] un morphisme homotopiquement cohérent entre diagrammes homotopiquement cohérents est un 1-simplexe de l'ensemble simplicial $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ ayant pour m -simplexes :

$$\mathcal{S}(\mathcal{A})_m = \mathcal{S}\text{-Cat}(S(\mathcal{A} \times [m]), Top_S).$$

La catégorie des morphismes cohérents entre diagrammes cohérents corres-

pond alors à la catégorie $C(\underline{\mathcal{S}}(Ner(\mathcal{A}), Ner_{hc}(Top_S)), c'est\text{-}\grave{a}\text{-}dire\ \grave{a}\ la\ cat\grave{e}gorie\ associ\acute{e}e\ \grave{a}\ l'ensemble\ simplicial\ \underline{\mathcal{S}}(Ner(\mathcal{A}), Ner_{hc}(Top_S)),\ o\grave{u}\ \underline{\mathcal{S}}(-, -)\ est\ le\ Hom\ simplicial\ de\ \underline{\mathcal{S}} = Fonc(\Delta^{op}, Ens).$

BIBLIOGRAPHIE.

- B. BOURN D., A canonical action on indexed limits ; an application to coherent homotopy, *A paraître.*
- B-C. BOURN D. & CORDIER J.-M., 1) Distributeurs et théorie de la forme, *Cahiers Top. et Géom. Diff.* XXI-2 (1980), 161-189.
 2) Une fomulation générale des limites homotopiques, *Multigraphié, Amiens* 1980.
- B-K. BOUSFIELD A.K. & KAN D.M., Homotopy limits, completions and localizations, *Lecture Notes in Math.* 304, Springer (1972).
- C. CORDIER J.-M., Sur les limites homotopiques de diagrammes homotopiquement cohérents, *A paraître.*
- D-K. DWYER W.G. & KAN D.M., Simplicial localizations of categories, *J. Pure and Appl. Algebra* 17 (1980), 267-284.
- E-H. EDWARDS D. A. & HASTINGS H.M., Čech and Steenrod homotopy theories with applications to geometric topology, *Lecture Notes in Math.* 542 (1976).
- G. GRAY J. W., Closed categories, lax limits and homotopy limits, *J. Pure and Appl. Algebra* (à paraître).
- L. LEITCH R.D., The homotopy commutative cube, *J. London Math. Soc.* (2) 9 (1974), 23-29.
- F. PORTER T., Coherent prohomotopy theory, *Cahiers Topo. et Géom. Diff.* XIX-1 (1978), 3-45.
- Se. SEGAL G., Categories and cohomology theories, *Topology* 13 (1974), 293-312.
- St. STREET R., Two constructions on lax functors, *Cahiers Topo. et Géom. Diff.* XIII-3 (1972), 217-264.
- V. VOGT R.M., Homotopy limits and colimits, *Math. Z.* 134 (1973), 11-52.

U. E. R. de Mathématiques
 33 rue Saint-Leu
 80039 AMIENS CEDEX.