ANNALS OF MATHEMATICS
Vol. 57, No. 1, January, 1953
Printed in U.S.A.

SUR LA COHOMOLOGIE DES ESPACES FIBRES PRINCIPAUX ET DES ESPACES HOMOGENES DE GROUPES DE LIE COMPACTS

PAR ARMAND BOREL

(Received January 22, 1952)

Introduction

L'étude de la topologie des groupes de Lie compacts et plus généralement de leurs espaces homogènes, inaugurée par E. Cartan [8],[1] poursuivie notamment par C. Ehresmann ([14], [15], [16], [17]), Pontrjagin [26], Hopf ([19], [20]), Samelson ([20], [28]) a fait ces dernières années l'objet de plusieurs travaux dûs d'une part à J. Leray [25], d'autre part à J. L. Koszul ([21], [22]), H. Cartan [11], C. Chevalley, A. Weil. Ces mémoires, mis à part ceux de Ehresmann, sont presque uniquement consacrés à l'homologie ou à la cohomologie réelle. Cependant ce dernier ne procède pas à proprement parler à une étude d'espaces homogènes, car il utilise des décompositions cellulaires dont la construction repose sur une définition géométrique directe des variétés envisagées; le fait qu'elles soient par ailleurs des quotients de groupes de Lie compacts ne joue guère de rôle.

Très différent est le point de vue, purement algébrique, de J. L. Koszul [21], qui considère l'homologie et la cohomologie d'une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique zéro. Dans le cas des coefficients réels, l'interprétation topologique des résultats se fait bien entendu par l'intermédiaire des théorèmes de E. Cartan et de G. de Rham, qui ont justement conduit à ce formalisme algébrique, comme on sait. Ce travail montre le grand intérêt de la transgression (cf. §5), notion directement inspirée par l'isomorphisme caractéristique réduit de G. Hirsch,[2] aussi introduite dans un cas particulier par S. S. Chern ([12], Theorem 8). Sous l'impulsion de A. Weil, on a été amené ensuite à considérer la transgression non seulement dans les espaces homogènes, mais aussi dans les espaces fibrés principaux différentiables; son étude se ramène alors en définitive à celle de la transgression dans une algèbre différentielle à cohomologie triviale qui joue le rôle de l'algèbre des formes différentielles extérieures d'un espace universel (§18) pour toutes les dimensions, comme H. Cartan l'a mis en évidence [11]. Les résultats obtenus dans cette voie, en partie conjointement, par Cartan, Chevalley, Koszul, Weil sont résumés dans [11] et [22].

Les travaux de Leray concernent aussi la cohomologie réelle des espaces homogènes mais procèdent d'idées différentes. Comme ceux de Hopf et Samelson, ils utilisent des méthodes de topologie algébrique; les hypothèses de différentiabilité et la théorie infinitésimale, qui sont à la base de [11], [21], [22], n'y interviennent que dans une très faible mesure. Leray se sert surtout de sa théorie

[1] Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie, placée à la fin de ce travail.

[2] *Un isomorphisme attaché aux structures fibrées*, C. R. Acad. Sci. Paris **227** (1948), 1328–1330.

homologique des espaces fibrés [24], elle-même cas particulier d'une théorie homologique des applications continues [23].

Le présent travail a pour objet l'étude de la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes par rapport à des coefficients variés; nous y utilisons constamment la théorie de Leray, ce qui n'est pas pour surprendre, puisqu'elle vaut pour des coefficients quelconques. Guidés par les recherches de Cartan-Chevalley-Koszul-Weil, nous donnons une place prépondérante à la transgression, aux espaces universels et à leurs bases, les espaces classifiants. L'existence des espaces universels pour des groupes de Lie compacts et des dimensions quelconques est fondamentale ici. C'est en bonne partie ce fait et le théorème de Hopf qui, joints à la théorie générale de Leray, nous permettront d'obtenir des résultats particuliers aux espaces fibrés principaux et aux espaces homogènes.

Nous résumons maintenant brièvement le contenu des différents chapitres.

Le Chapitre I est surtout consacré au rappel des notions et théorèmes utilisés dans la suite, en particulier de la théorie de Leray. Pour rendre ce travail aussi indépendant que possible nous avons également répété toutes les définitions pour lesquelles il aurait fallu renvoyer le lecteur à des Mémoires originaux. Ainsi, la lecture du nôtre ne présuppose pas obligatoirement celle d'autres travaux, pour autant que l'on veuille bien admettre les théorèmes énoncés sans démonstrations dans les quatre premiers paragraphes. Le §5 donne plusieurs définitions de la transgression dans un espace fibré; la plus importante ici est la dernière, qui s'exprime directement dans l'algèbre spectrale de l'espace fibré.

Les énoncés classiques du théorème de Hopf [19], [21] et[3] sont formulés en caractéristique zéro, mais Hopf a déjà souligné que sa démonstration fournissait des renseignements partiels modulo p; ici il importait naturellement de déterminer la structure d'une algèbre de Hopf (c'est à dire vérifiant les conditions de Hopf) sur un corps de caractéristique p quelconque, ce qui est fait au Chapitre II, §6. On peut exprimer le résultat obtenu en disant qu'une algèbre de Hopf est toujours isomorphe à un produit tensoriel gauche d'algèbres de Hopf à un générateur (si le corps de base est parfait); le §6 est purement algébrique et, excepté pour quelques définitions rappelées au §1 (A), (E), indépendant du Chapitre I. Le §7 tire quelques conséquences topologiques de ce théorème.

Le Chapitre III est consacré à une étude sommaire de la cohomologie des variétés de Stiefel réelles, complexes et quaternioniennes. Il s'agit ici simplement d'obtenir des renseignements qui permettront d'appliquer à des cas particuliers les théorèmes généraux des chapitres suivants.

Dans le Chapitre IV nous démontrons le théorème central de ce travail (Théorème 13.1); bien que nous ne l'utilisions plus loin que dans des questions topologiques, il est lui-même algébrique et concerne des algèbres spectrales ayant quelques propriétés formelles des algèbres spectrales d'espaces fibrés, aussi ce Chapitre est-il complètement algébrique.

[3] J. Leray, Jour. Math. pur. appl. IXs. **24** (1946), 96–248, No. 24.

Le Chapitre V introduit tout d'abord les notions d'espace universel $E(n, G)$ ou simplement E_G pour un groupe de Lie compact G et pour n, (espace fibré principal compact, connexe et localement connexe, de fibre G, à cohomologie triviale jusqu'à n), et d'espace classifiant $B(n, G)$ ou $B_G = E_G/G$ pour G et pour n. Le §19 contient les applications du Théorème 13.1; le résultat principal est le suivant: Si l'algèbre de cohomologie $H(G, K_p)$ d'un groupe de Lie compact connexe, à coefficients dans un corps de caractéristique p, est une algèbre extérieure à générateurs de degrés impairs, alors elle possède une base formée d'éléments "universellement transgressifs" (c'est à dire transgressifs dans E_G, donc notamment dans tous les espaces fibrés principaux compacts localement connexes de fibre G); de plus l'algèbre de cohomologie $H(B_G, K_p)$ de B_G est (jusqu'à n) une algèbre de polynômes dont les générateurs sont images par transgression d'un système minimal de générateurs universellement transgressifs de $H(G, K_p)$.

Dans le §20 nous montrons en premier lieu qu'un élément universellement transgressif de $H(G, K_p)$ est aussi primitif, les résultats du §19 permettent alors de généraliser les principaux théorèmes de la Thèse de H. Samelson [28]. Si U est un sous-groupe fermé de G, il existe un homomorphisme naturel $\rho^*(U, G)$: $H(B_G, M) \rightarrow H(B_U, M)$, ($M$ anneau de coefficients quelconques), très important pour la suite qui est défini dans le §21, où il est mis en relations avec l'homomorphisme $i^*: H(G, M) \rightarrow H(U, M)$ transposé de l'inclusion. Le §22 introduit des algèbres spectrales relatives aux espaces fibrés principaux et aux espaces homogènes, mettant en jeu les espaces classifiants; en particulier celle qui mène de $H(B_G, H(G/U, M))$ à $H(B_U, M)$ sera fréquemment utilisée (Théorème 22.2). Enfin le §23 étudie les espaces classifiants pour les groupes orthogonaux unimodulaires ou, si l'on veut, les grassmanniennes de plans orientés; en cohomologie mod. 2 on retrouve un théorème de Pontrjagin.

Le Chapitre VI est consacré à la cohomologie réelle; après avoir généralisé aux espaces fibrés principaux compacts localement connexes un théorème de Chevalley sur la cohomologie des espaces fibrés principaux différentiables, nous obtenons une formule très générale de H. Cartan, qui affirme que l'algèbre de cohomologie réelle d'un espace homogène G/U est l'algèbre de cohomologie de $H(B_U, R) \otimes H(G, R)$ muni d'une différentielle convenable déterminée par la transgression dans E_G et par $\rho^*(U, G)$. On pourrait notamment en déduire par des raisonnements algébriques la cohomologie de G/U lorsque rang G = rang U (et en particulier la formule de Hirsch); cependant nous avons préféré traiter cette question indépendamment en nous appuyant sur deux théorèmes du Chapitre V et sur un lemme affirmant que les nombres de Betti de G/T, (T tore maximal de G), sont nuls en dimensions impaires. Le §27 fait intervenir l'algèbre des polynômes invariants par le groupe de Weyl de G et montre qu'on peut l'identifier à $H(B_G, R)$. Ce Chapitre s'achève par quelques remarques sur l'homomorphisme $\rho^*(U, G)$, en partie valables pour des coefficients quelconques.

Le Chapitre VII étudie la cohomologie mod. p ou à coefficients entiers d'espaces homogènes; les résultats sont loin de se présenter sous une forme aussi achevée que dans le cas des coefficients réels; nous avons surtout examiné le cas d'égalité des rangs et donné des conditions suffisantes pour que l'on puisse se ramener à la considération des invariants du groupe de Weyl, ce qui permet souvent de faire des calculs effectifs; comme applications, nous étudions la cohomologie de quelques espaces homogènes classiques: $\mathbf{U}(n)/\mathbf{U}(n_1) \times \cdots \times \mathbf{U}(n_k)$, $(n_1 + \cdots + n_k = n)$, $\mathbf{SO}(2n)/\mathbf{U}(n)$, $\mathbf{U}(2n)/\mathbf{Sp}(n)$, $\mathbf{U}(n)/\mathbf{SO}(n)$. On remarquera que plusieurs théorèmes de ce chapitre prendraient une forme plus satisfaisante si l'on pouvait montrer que $H(G/T, Z)$, (T tore maximal de G) est sans torsion; dans le §29 nous vérifions que cela est vrai si G est un produit de groupes simples isomorphes à des groupes classiques ou à G_2, F_4, mais nous ne savons rien quant aux cas $G = \mathbf{E}_6$, $\mathbf{E}_7$, $\mathbf{E}_8$.

Les principaux résultats de ce travail ont été annoncés dans [1], [3], [4]; dans un Mémoire ultérieur, nous démontrerons les théorèmes annoncés dans [2] et qui ne figurent pas dans le Chapitre III, étudierons la cohomologie mod 2 de quelques espaces homogènes des groupes orthogonaux (qui sont l'objet de [15]), ainsi que les Sq^i dans les grassmanniennes et les variétés de Stiefel. Un autre travail, qui sera écrit en collaboration avec J. P. Serre, établira les résultats de [6].

En terminant cette introduction, je tiens à remercier M. J. Leray, qui m'a communiqué les démonstrations de résultats annoncés dans les *Comptes Rendus*; je lui dois en outre de considérables améliorations dans l'exposition et la rédaction du Chapitre IV. Je remercie aussi M. H. Cartan qui a bien voulu me tenir au courant des recherches qu'il poursuivait avec MM. Chevalley, Koszul, Weil; ses remarques ont beaucoup contribué à me faire comprendre le sens topologique des méthodes algébriques développées par ces auteurs. J'ai d'autre part tiré un très grand profit de son Séminaire de Topologie algébrique. Ma reconnaissance va également à J. P. Serre, dont les nombreuses suggestions m'ont grandement aidé durant l'élaboration de ce travail.

Table des Matieres

Chapitre I. Preliminaires

§1. Notions algébriques

(A) On désignera toujours par A un anneau isomorphe soit à Z soit à un corps de caractéristique p K_p (p nul ou premier).[4] Les A-modules considérés dans la suite sont toujours supposés unitaires. Un A-module E est *sans torsion* si $ax = 0 (a \in A, x \in E)$ implique $a = 0$ ou $x = 0$, ce n'est naturellement une restriction que pour $A = Z$; si E est un groupe abélien, on notera Tors. E le sous-groupe de ses éléments d'ordre fini, on dira que E est sans k-torsion si Tors. E ne contient pas d'élément non nul d'ordre divisible par k, en particulier E est toujours sans o-torsion.

Un A-module E est *gradué* s'il est somme directe de sous-modules E^i, $m^i \in E^i$ est dit homogène de degré i, il est bigradué s'il est somme directe de sous-modules

[4] Ce que nous rappelons dans ce Chapitre vaut aussi si A est un anneau principal quelconque, mais nous n'aurons besoin que des cas précités.

$E^{i,j}$, $m^{i,j} \in E^{i,j}$ est bi-homogène de bi-degré (i, j). Si E est une A-algèbre, on exige encore

$$(1.1) \qquad E^i \cdot E^j \subset E^{i+j} \text{ resp. } E^{i,j}E^{s,t} \subset E^{i+s,j+t}.$$

Une algèbre graduée est anticommutative si $m^i m^j = (-1)^{ij} m^j m^i$. On notera $\wedge P$ l'algèbre extérieure d'un A-module libre P; si P est gradué, $\wedge P$ est graduée de façon évidente; pour $A = Z$, ou $A = K_p$ $(p \neq 2)$ elle n'est anticommutative que si P est gradué par des degrés impairs.

Une A-algèbre *différentielle* (E, d, ω) est une algèbre munie d'un endomorphisme A-linéaire d et d'un automorphisme ω (pour la structure d'algèbre) vérifiant

$$(1.2) \qquad \mathrm{d} \cdot \mathrm{d} = 0; \qquad d\omega + \omega d = 0; \qquad d(x \cdot y) = dx \cdot y + \omega(x) \cdot dy.$$

On appelle cocycles les éléments du noyau $C(E)$ de d, cobords les éléments de l'image $D(E)$ de d, le quotient $H(E) = C(E)/D(E)$, muni du produit usuel défini par passage au quotient, est l'algèbre de cohomologie de E. Si E est graduée, on supposera encore que $d(E^i) \subset E^{i+r}$ (r indépendant de i est le degré de d), $H(E)$ est alors aussi graduée.

(E, d, ω) sera dite *canonique* si elle est graduée, si d est de degré 1 et si $\omega(m^i) = (-1)^i m^i (m^i \in E^i)$.

(B) *Algèbre filtrée.* Une *filtration* sur une A-algèbre E est définie par une suite de sous-modules S^p vérifiant:

$$(1.3) \qquad S^{p+1} \subset S^p, \; S^p \cdot S^q \subset S^{p+q} \qquad \bigcup S^p = E.$$

En posant $f(x) = \max(p, x \in S^p)$, on définit sur E une fonction à valeurs entières ou égales à $+\infty$, satisfaisant à:

$$(1.4) \qquad \begin{array}{ll} f(x+y) \geqq \min(f(x), f(y)) & f(ax) \geqq f(x) \quad (a \in A,\, x,\, y \in E) \\ f(x \cdot y) \geqq f(x) + f(y) & f(0) = +\infty. \end{array}$$

Réciproquement une telle fonction étant donnée, on définit une filtration en posant $S^p = \{x, f(x) \geqq p\}$.

On dira que la filtration est bornée supérieurement (inférieurement) s'il existe k tel que $S^k = 0$ (resp. $S^k = E$); la fonction f admet alors la borne supérieure (resp. inférieure) k sur les éléments différents de zéro.

A une algèbre filtrée E est associée une algèbre graduée $G(E)$. Comme module, c'est la somme directe des modules S^p/S^{p+1}; le produit de $\bar{s}^p \in S^p/S^{p+1}$ par $\bar{s}^q \in S^q/S^{q+1}$ est l'image dans S^{p+q}/S^{p+q+1} du produit $s^p s^q$ de deux représentants de $\bar{s}^p$ et $\bar{s}^q$ dans S^p et S^q, cette définition est légitimée par (1.3).

Si la filtration est bornée supérieurement et inférieurement, $G(E)$ est la somme directe des quotients successifs d'une suite normale finie de sous-modules emboîtés. Cas particuliers: $A = K$, $G(E)$ est alors un espace vectoriel isomorphe (non canoniquement) à E, gradué par un nombre fini de degrés; $A = Z$, $E = Z$, $G(E)$ est somme directe d'un nombre fini de groupes cycliques d'ordres finis p_i

différents et d'un groupe Z; $A = Z$, $E = Z + \cdots + Z(k \text{ fois})$, $G(E)$ est somme d'un groupe fini et de k groupes Z; $A = Z$, E groupe fini d'ordre n, $G(E)$ est somme de m groupes finis d'ordres $n_1, \cdots, n_m$ et $n_1 \cdots n_m = n$. Remarquons enfin que si $G(E)$ est sans torsion (E quelconque), E est sans torsion.

Si E est différentielle filtrée, on exigera encore que $f(\omega(x)) = f(x)$. Posant $C^p = S^p \cap C(E)$, $D^p = D(E) \cap S^p$, on définit dans $H(E)$ une filtration par des sous-modules J^p, images canoniques des C^p et alors

$$G(H(E)) = \sum J^p/J^{p+1} = \sum C^p/C^{p+1} + D^p. \tag{1.5}$$

(C) *Algèbre spectrale.* A une algèbre différentielle filtrée on fait correspondre une *algèbre spectrale*, que nous noterons (H_r), formée d'une suite d'algèbres différentielles graduées. Renvoyant à [23] pour plus de détails, nous en rappellerons brièvement la définition et quelques propriétés. On pose:

$$\begin{aligned} C_r^p &= \{x, x \in S^p, dx \in S^{p+r}\}; & D_r^p &= dC_r^{p-r} \\ H_r^p &= C_r^p/C_{r-1}^{p+1} + D_{r-1}^p; & H_r &= \sum H_r^p \end{aligned} \tag{1.6}$$

on définit dans H_r un produit et un automorphisme ω par passage au quotient et un endomorphisme $d_r^k: H_r^k \to H_r^{k+r}$ par passage au quotient à partir des homomorphismes de paires

$$(C_r^p, C_{r-1}^{p+1} + D_{r-1}^p) \xrightarrow{d} (C^{p+r}, D_{r-1}^{p+r}) \xrightarrow{i} (C_r^{p+r}, C_{r-1}^{p+r+1} + D_{r-1}^{p+r}) \tag{1.7}$$

(i est l'inclusion), d'où un endomorphisme d_r de H_r, évidemment de carré nul, qui augmente le degré de r. On montre que H_r est alors une algèbre différentielle graduée et que son algèbre de cohomologie est H_{r+1}. On introduit encore $H_\infty = G(H(E))$, $H_{-\infty} = G(E)$.

On note κ_{r+1}^r l'homomorphisme des cocycles de H_r sur H_{r+1} et on pose $\kappa_s^r = \kappa_s^{s-1} \circ \cdots \circ \kappa_{r+2}^{r+1} \circ \kappa_{r+1}^r (s > r)$; κ_s^r est donc l'homomorphisme sur H_s des éléments de H_r qui sont des "cocycles pour $d_r, d_{r+1}, \cdots, d_{s-1}$," c'est à dire qui vérifient $d_k \kappa_k^r h = 0$ pour $r \leqq k < s$.

Nous ne nous intéresserons qu'au cas où l'algèbre filtrée (E, d, ω) admet encore une graduation par des sous-modules que nous noterons ici ${}^nE$, pour laquelle elle est canonique, chaque S^p étant somme directe de ses intersections avec les modules ${}^iE$. Cette nouvelle graduation se transmet aux algèbres H_r. Posons

$$\begin{aligned} C_r^{p,q} &= C_r^p \cap {}^{p+q}E \qquad D_r^{p,q} = D_r^p \cap {}^{p+q}E \\ J^{p,q} &= J^p \cap {}^{p+q}H(E) \end{aligned} \tag{1.8}$$

alors H_r est bigradué par des sous-modules

$$H_r^{p,q} = C_r^{p,q}/C_{r-1}^{p+1,q-1} + D_{r-1}^{p,q} \tag{1.9}$$

et H_∞ par les sous-modules

$$H_\infty^{p,q} = J^{p,q}/J^{p+1,q-1}.$$

Si de plus

$$0 \leqq f(x) \leqq i \qquad \text{pour } x \in {}^iE,\ x \neq 0 \tag{1.10}$$

alors

$$H_r^{p,q} = H_{r+1}^{p,q} = \cdots = H_\infty^{p,q} \qquad \text{pour } r > p + q + 1 \tag{1.11}$$

ce qui permet de considérer $H_\infty = G(H(E))$ comme la limite de H_r pour r infini.

Enfin nous appellerons *algèbre spectrale canonique* une suite (H_r) d'algèbres différentielles H_r (r entier quelconque, ou éventuellement r entier $\geqq r_0$) jouissant des propriétés suivantes: H_r est une algèbre différentielle bigraduée par deux degrés p, $q \geqq 0$; elle est canonique et anticommutative par rapport au degré total $n = p + q$; d_r augmente p de r, diminue q de $r - 1$, H_{r+1} est l'algèbre de cohomologie de H_r.

(D) *Homomorphismes.* Soient E, E' deux algèbres sur A, $\lambda: E \rightarrow E'$ un homomorphisme; si E et E' sont graduées, on supposera que $\lambda(E^i) \subset E'^i$, si elles sont différentielles que $d' \cdot \lambda = \lambda \cdot d$, $\omega' \lambda = \lambda \omega$ si elles sont filtrées que $\lambda(S^p) \subset S'^p$; λ induit alors un homomorphisme des algèbres spectrales (H_r) et (H'_r), c'est à dire pour tout r un homomorphisme de H_r dans H'_r que nous désignerons aussi par λ vérifiant:

$$\lambda(\kappa_{r+1}^r h) = \kappa_{r+1}^r(\lambda(h)) \qquad \text{si } h \text{ est cocycle pour } d_r \tag{1.12}$$

λ induit aussi un homomorphisme de $H(E)$ dans $H(E')$, pour lequel $\lambda(J^p) \subset J'^p$, et par conséquent un homomorphisme de H_∞ dans H'_∞. Si λ est un isomorphisme de H_r sur H'_r, c'est naturellement aussi un isomorphisme de H_s sur H'_s ($s \geqq r$). Si de plus E et E' sont gradués et si (1.10) est vérifiée, λ est un isomorphisme de $H(E)$ sur $H(E')$ conservant la filtration; en effet, sous les hypothèses faites, λ est un isomorphisme de $G(H(E)) = H_\infty = \lim H_r$ sur $G(H(E')) = \lim H'_r$; sur les éléments ayant un degré total n donné la filtration est bornée supérieurement, le raisonnement de la Prop. 6.2 de [23] s'applique.

(E) *Produit tensoriel.* $E \otimes F$ désignera le produit tensoriel sur A des A-modules E et F ([7] §1). Si E et F sont gradués, $E \otimes F$ est bigradué par les sous-modules $E^i \otimes F^j$; on y introduit encore un troisième degré, le degré total $i + j$; si E et F sont des algèbres graduées, on fait de $E \otimes F$ une algèbre bigraduée en introduisant un produit par

$$(x \otimes y^i)(x^j \otimes y) = (-1)^{ij}(x \cdot x^j \otimes y^i \cdot y). \tag{1.13}$$

En fait il faudrait nommer ce produit le produit tensoriel gauche, par opposition au produit tensoriel d'algèbres usuel ([7], § 3), mais comme nous n'utiliserons que le premier, nous omettrons le mot gauche. Si E et F sont anticommutatives, $E \otimes F$ l'est pour le degré total; si E et F sont canoniques, on fait de $E \otimes F$ une algèbre différentielle canonique pour le degré total en introduisant une différentielle d et un automorphisme ω par

$$\begin{aligned} d(x^p \otimes y) &= dx^p \otimes y + (-1)^p x^p \otimes dy \\ \omega(x^p \otimes y^q) &= (-1)^{p+q}(x^p \otimes y^q) \end{aligned} \tag{1.14}$$

$x \otimes y \to dx \otimes y$ et $x \otimes y \to x \otimes dy$ sont aussi des endomorphismes de carré nul, que nous nommerons les différentielles partielles par rapport à E et F.

§2. Espaces fibrés

On appellera ici espace fibré un système (E, B, F, p) formé de deux espaces E, B, d'une application ouverte p de E sur B, la projection, telle que pour tout $b \in B$ il y ait un voisinage V_b de b et un homéomorphisme ζ_b de $p^{-1}(V_b)$ sur $V_b \times F$ vérifiant:

$$\zeta_b(p^{-1}(x)) = x \times F \qquad (x \in V_b). \tag{2.1}$$

On dit comme on sait qu'un fibré est trivial s'il y a un homéomorphisme de E sur $B \times F$ satisfaisant à (2.1) pour tout $x \in B$. La condition imposée ici est donc celle de la *trivialité locale*. A vrai dire, pour obtenir le Théorème 4.1, il faut encore exiger une certaine uniformité dans la trivialité locale et on postule qu'il existe un voisinage V de la diagonale de $B \times B$ tel que l'espace fibré soit trivial au-dessus de $U \subset B$ toutes les fois que $U \times U \subset VV$; mais cette propriété est une conséquence de la trivialité locale en tout cas si B est compact ou si B est métrisable, deux cas particuliers d'une généralité bien suffisante pour ce travail, et c'est pourquoi nous n'incorporons pas cette condition supplémentaire dans la définition.

On dit que le groupe compact G opère à droite sur l'espace E s'il existe une application continue $h: E \times G \to E$ vérifiant:

$$x \cdot e = x \; (x \cdot g) \cdot g' = x \cdot (gg'), \quad (x \in E,\ g,\ g' \in G,\ e \text{ unité de } G) \tag{2.2}$$

(on a posé $h(x, g) = x \cdot g$). Définition analogue pour un groupe opérant à gauche. Supposons de plus que

$$x \cdot g \neq x \text{ si } g \neq e,\ x \text{ quelconque.} \tag{2.3}$$

Alors G définit une partition de E en sous-espaces fermés homéomorphes à G, les trajectoires des points de E. Soit p la projection de E sur son quotient $B = E/G$ par la relation d'équivalence définie par G. Le système (E, B, G, p) est un *espace fibré principal de groupe* (compact) G. Pour les besoins de la théorie de Leray, il n'est pas nécessaire d'exiger la trivialité locale, mais ces distinctions n'ont aucune importance dans ce travail. En effet, G sera toujours de Lie, E toujours localement compact, donc complètement régulier, et la trivialité locale est assurée par un théorème de A. M. Gleason, (Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 35–43); trivialité locale s'entend ici au sens des espaces fibrés principaux, cela signifie que pour tout $b \in B$ il existe un voisinage U_b et un homéomorphisme ζ_b de $p^{-1}(U_b)$ sur $U_b \times G$ vérifiant (2.1) et

$$\zeta_b(x \cdot g) = \zeta_b(x) \cdot g \tag{2.4}$$

(on fait bien entendu opérer G dans $U_b \times G$ par $(x, g) \cdot g' = (x, gg')$).

Soit F un espace sur lequel G opère à gauche, (E, B, G, p) un espace fibré principal. On notera $(E, F)_G$ le quotient, introduit par C. Ehresmann, de $E \times F$

par la relation d'équivalence $(x, g, g^{-1}\cdot f) \approx (x, f)$; l'application $(x, f) \to p(x)$ de $E \times F$ sur B passe au quotient et fait de $X = (E, F)_G$ un espace fibré (X, B, F, p) à groupe structural G (localement trivial si E l'est). Explicitons deux cas particuliers de cette notion.

(a) F est lui-même un espace fibré principal (E', B', G, p'), sur lequel en fait opérer G à gauche par $x' \to x' \cdot g^{-1}$; la relation d'équivalence devient $(x, x') \approx (x, g, x' \cdot g)$; l'espace $(E, E')_G$ admet 2 fibrations, (X, B, E', p) et (X, B', E, p'). Si i_x est l'injection de E' dans X qui résulte de l'application $e' \to x \times e'$ de E' dans $E \times E'$ et de la projection de ce dernier sur X, il est clair que l'on a un diagramme commutatif

(2.5)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p'"'] & E' \arrow[l, "i_x"'] \arrow[dl, "p'"] \\ B' & \end{tikzcd}$$

(b) G opère transitivement sur F, qui s'identifie donc à l'espace G/U des classes à gauche de G suivant un sous-groupe fermé U, et sur lequel G opère par les translations à gauche. Alors $(E, F)_G = (E, G/U)_G$ s'identifie canoniquement au quotient de E par la relation d'équivalence qu'y définit U; c'est donc un espace fibré $(E/U, B, G/U, p)$. Si de plus U est invariant dans G, G/U opère de façon évidente à droite sur E/U, qui devient un espace fibré principal de groupe G/U.

Nous ne répéterons pas les définitions bien connues d'homomorphismes d'espaces fibrés, d'espaces fibrés principaux, ou d'espaces fibrés à groupe structural donné (cf. par ex. [9], Exp. VI). Rappelons enfin la définition d'un espace fibré image réciproque (induced bundle dans [31], §10); soit (E', B', F', p') un espace fibré, $f: B \to B'$ une application continue, E le sous-espace de $B \times E'$ formé des points (b, e') tels que $f(b) = p'(e')$. On définit $p: E \to B$ par $p((b, e')) = b$ et $\bar{f}: E \to E'$ par $\bar{f}(b, e')) = e'$; p fait de E un espace fibré (E, B, F', p), (localement trivial si E' l'est), nommé l'image réciproque de (E', B', F', p') par f. Le diagramme

(2.6)
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "f"] & B' \end{tikzcd}$$

est évidemment commutatif, $\bar{f}$ est un homomorphisme de (E, B, F', p) dans (E', B', F', p'); E' étant localement trivial, ce diagramme détermine (E, B, F', p) à un isomorphisme près. Si E' est principal, E l'est aussi, (pour toutes les notions rappelées dans ce paragraphe, voir [9], Exp. VI, VII, aussi [31]).

§3. Théorie de Leray: Cohomologie des espaces compacts

De la théorie de Leray, nous utiliserons presque uniquement le théorème d'existence de l'algèbre spectrale d'un espace fibré et ses propriétés résumées au début du §4; des notions classiques jointes à celles qui ont été rappelées dans les §1 et 2 suffisent pour les exprimer. Cependant dans les §5 et 24, la manière même dont cette algèbre spectrale est construite interviendra, d'où la nécessité de faire appel à d'autres points de la théorie de Leray, que nous allons résumer ici. Nous n'en aurons besoin dans les §5 et 24 que pour les espaces compacts, aussi pour ne pas allonger inutilement ces préambules ne considérerons nous dans ce paragraphe que des espaces COMPACTS; nous insistons sur le fait que certaines des définitions ci-dessous ne sont valables telles quelles que pour les espaces compacts.

[23] développe tout d'abord une théorie axiomatique de la cohomologie d'Alexander-Spanier[5] à supports compacts; la notion algébrique de base y est celle d'anneau, mais il y a avantage pour certaines applications à partir plus généralement d'algèbres sur A, ce que nous ferons ici; les démonstrations de [23] se transportent naturellement sans difficulté à ce cas, on trouvera du reste un exposé détaillé de la théorie fait de ce point de vue dans [5], où nous renverrons aussi pour quelques propositions ne figurant pas dans [23] ou [24].

Un *A-complexe* K sur un espace compact X est un A-module à chaque élément k duquel est attaché une partie fermée $S(k)$ de X, son support, par une loi qui vérifie:

$$S(k + k') \subset S(k) \cup S(k'); \qquad S(ak) \subset S(k) \tag{3.1}$$

$$S(k) = \emptyset \text{ est équivalent à } k = 0. \tag{3.2}$$

Si K est une A-algèbre différentielle, on supposera encore

$$S(k.\, k') \subset S(k) \cap S(k'); \qquad S(dk) \subset S(k); \qquad S(\omega(k)) = S(k) \tag{3.3}$$

et s'il est gradué, que $S(k)$ est la réunion des supports des composantes homogènes de k; le complexe est *sans torsion* si $S(ak) = S(k)$, $(a \in A,\ k \in K)$, K est alors sans torsion en tant que A-module vu (3.1) et (3.2).

Soit $f{:}X \to Y$ une application continue. Si K est un complexe sur X, on lui fait correspondre un complexe $f(K)$ ou fK sur Y en attribuant à k le support $f(S(k))$. Si L est un complexe sur Y, on y introduit de nouveaux supports sur X par $S'(k) = f^{-1}(S(k))$. Le quotient de L par les éléments de (nouveaux) supports vides est un complexe sur X, noté $f^{-1}(L)$; en particulier si f est l'injection d'un sous-espace $X \subset Y$, $f^{-1}(L)$ est la *section de* L *par* X que nous désignerons par XL, (et Xk sera l'image dans XL de $k \in L$). Il est clair que l'on a des isomorphismes d'algèbres:

$$fK = K; \qquad f^{-1}(y)\cdot f^{-1}(L) = yL. \tag{3.4}$$

Remarquons encore que si L est sans torsion, XL l'est aussi.

Soient K et K' deux A-complexes sur X; on définit dans $K \otimes K'$ des supports

[5] Suivant H. Cartan [10] nous nommons ainsi la cohomologie étudiée dans [30], dans laquelle les p-cochaînes sont les fonctions de $p + 1$ points de l'espace; à supports compacts signifie que l'on ne considère que les fonctions nulles lorsque les $p + 1$ points sont suffisamment voisins et en dehors d'un compact (dépendant de la fonction considérée).

ainsi: Soit $h \in K \otimes K'$, on dit que $x \in S(h)$ si l'image de h dans $xK \otimes xK'$ par l'homomorphisme produit tensoriel des sections $K \to xK$ et $K' \to xK'$ est non nulle. Le quotient de $K \otimes K'$ par les éléments de support vide est un A-complexe sur X, *l'intersection de* K *et* K', noté $K \bigcirc K'$.

K est *fin* si pour tout recouvrement fini ouvert $V_1, \cdots, V_n$ de X il existe des endomorphismes de K (pour la structure de A-module uniquement) $r_1, \cdots, r_n$ tels que

$$S(r_i(k)) \subset \overline{V}_i \cap S(k); \qquad (r_1 + \cdots + r_n)(k) = k. \tag{3.5}$$

K est une A-*couverture* s'il est sans torsion, canonique gradué par des degrés $\geqq 0$, muni d'un élément neutre u dont le support est X, est si $H^0(xK) \cong A$, $H^i(xK) = 0$ $(i > 0)$ pour tout $x \in X$.

Le théorème d'unicité affirme que les algèbres de cohomologie de deux A-couvertures fines sont canoniquement isomorphes ([5], Exp. III); on note $H(X, A)$ l'algèbre de cohomologie ainsi obtenue, c'est l'algèbre de cohomologie d'Alexander-Spanier de X à valeurs dans A, car les cochaînes d'Alexander-Spanier à valeurs dans A munies de supports convenables forment une A-couverture fine ([23] No. 16, [5] Exp. II). A vrai dire ce théorème est formulé et démontré directement dans [23] pour la cohomologie par rapport à un faisceau ([23], No. 41, [5] Exp. V, No. 5), mais cette notion n'interviendra explicitement ici que dans une faible mesure aussi, sans donner de définition complète, nous bornerons-nous à quelques indications, surtout pour traduire la cohomologie par rapport à un faisceau constant ou localement constant à l'aide de notions plus usuelles. Un faisceau B sur X est défini par la donnée d'une loi attachant à toute partie fermée F de X un module $B(F)$, vérifiant certains postulats ([23], No. 23, [5], Exp. V); à un complexe K et à un faisceau B on fait correspondre un complexe $K \bigcirc B$, leur *intersection*; c'est en gros l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'élements de K, à coefficients dans B, le domaine des coefficients pour k étant $B(S(k))$; en particulier si B est un "faisceau constant isomorphe au A-module M" et si K est fin, alors $K \bigcirc B \cong K \otimes M$, si K est une A-couverture fine, $H(K \bigcirc B) = H(K \otimes M)$ est canoniquement isomorphe au module de cohomologie d'Alexander-Spanier à valeurs dans M ([5], Exp. IV No. 1); c'est une algèbre anticommutative si M est une algèbre commutative.

La notion de faisceau localement constant généralise celle de système de coefficients locaux au sens de Steenrod, elle s'y ramène même lorsque X est globalement et localement connexe par arcs ([23], Nos. 69 à 73). Dans un faisceau localement constant localement isomorphe à un A-module M, il y a un plus grand sous-faisceau constant $\underline{B}$, isomorphe à un sous-module $\underline{M}$ de M ($\underline{M}(x)$ est l'ensemble des éléments de $M(x)$ sur lesquels le groupe fondamental de X agit trivialement dans le cas des coefficients locaux). On montre que si X est compact connexe, localement connexe K une A-couverture fine, alors $H^0(K \bigcirc B) \cong \underline{M}$, ([5], Exp. VII, Appendice), ce qui est du reste bien connu dans le cas des coefficients locaux. L'isomorphisme de $H^0(K \bigcirc B)$ sur $\underline{M}$ est induit par la section de $K \bigcirc B$ par un point $x \in X$, section qui est par définition un homomorphisme de $K \bigcirc B$ dans $xK \otimes B(x) = xK \otimes M$.

La section d'une couverture fine de X par un sous-espace $Y \subset X$ est une couverture fine de Y ([23], No. 32 et Prop. 37.3, [5] Exp. II). Si X est une variété on peut prendre comme R-couverture fine (R = corps des nombres réels) les formes différentielles extérieures, qui constituent une algèbre canonique *anticommutative*; cela vaut en particulier pour une sphère et le théorème d'immersion de Menger-Nöbeling donne la

PROPOSITION 3.1. *Un espace compact séparable métrique de dimension finie possède une R-couverture fine anticommutative.*[6]

X étant toujours compact, soit F un sous-espace fermé, K une A-couverture fine de X, K_{X-F} le noyau de $K \to FK$, c'est à dire l'ensemble des éléments de K dont le support ne rencontre pas F, et enfin M un A-module; K étant fin, on a une suite *exacte*:

$$0 \to K_{X-F} \otimes M \to K \otimes M \to FK \otimes M \to 0 \tag{3.6}$$

d'où la suite exacte de cohomologie

$$\to H^{n-1}(F, M) \xrightarrow{\delta} H^n(K_{X-F} \otimes M) \to H^n(X, M) \to H^n(F, M) \to \tag{3.7}$$

on montre que l'on peut identifier $H^n(K_{X-F}, M)$ à $H^n(X \bmod F, M)$ de manière à ce que la suite (3.7) devienne la suite exacte de cohomologie relative d'Alexander-Spanier ([5] Exp. IV No. 1, Exp. VII Appendice).

Notations. Sauf mention expresse du contraire, $H(X, M)$ sera l'algèbre de cohomologie d'Alexander-Spanier à supports compacts de l'espace localement compact X, à valeurs dans l'algèbre M ou éventuellement dans un faisceau localement constant, localement isomorphe à M. On dira que X a une cohomologie triviale relativement à M (jusqu'à n) si $H^0(X, M) = M$, $H^i(X, M) = 0$ pour $i > 0$ (resp. $0 < i \leqq n$) que X est sans torsion, (resp. sans k-torsion), si $H(X, Z)$ est sans torsion, (resp. sans k-torsion).

$f^*: H(Y, M) \to H(X, M)$ sera l'homomorphisme transposé de l'application continue $f: X \to Y$; pour la cohomologie à supports compacts il ne peut être non nul que si f est *propre*, c'est à dire si l'image réciproque de tout compact de Y est un compact de X.

§4. Théorie de Leray.: Espaces fibrés

J. Leray a associé des algèbres spectrales à toute application continue ([23], No. 50); nous ne considérerons ici que le cas de la projection d'un espace fibré sur sa base et énoncerons le théorème fondamental ainsi:

THEOREME 4.1. *Soit (E, B, F, p) un espace fibré connexe, localement compact, à fibres connexes, à base localement connexe, M une A-algèbre commutative.*

[6] D'après H. Cartan, il existe une R-couverture fine anticommutative sur tout espace compact (non publié).

Alors il existe une algèbre spectrale (H_r) *sur* A, *canonique pour* $r \geqq 2$, *dans laquelle* $H_2 = H(B, H(F, M))$, *et qui se termine par l'algèbre graduée associée à* $H(E, M)$ *convenablement filtrée.*[7]

De façon plus précise, H_2 est l'algèbre de cohomologie de B par rapport à un faisceau localement constant, localement isomorphe à $H(F, M)$, déterminé sur B par p, ou, si l'on veut, par rapport au système local de coefficients formé sur B par les algèbres $H(p^{-1}(b), M)$. Pratiquement nous utiliserons cette algèbre presque uniquement quand ce système est simple, c'est à dire lorsque l'on a dans H_2 des coefficients ordinaires. Ce fait se produit notamment dans chacun des deux cas suivants ([24], Nos. 4 et 5):

(i) B est globalement et localement connexe par arcs, et simplement connexe.

(ii) (E, B, F, p) est un espace fibré principal, dont la fibre est un groupe compact connexe, ou encore est le quotient $(E/U, B, F/U, p)$ d'un tel espace par un sous-groupe fermé (non nécessairement connexe) de F.

Si $M = A$ et si l'on a dans H_2 des coefficients ordinaires, on peut appliquer la "règle de Künneth". On sait qu'alors H_2 contient une sous-algèbre isomorphe à $H(B, A) \otimes H(F, A)$, qui lui est égale quand $A = K_p$ ou encore, si $A = Z$, quand $H(B, Z)$ ou $H(F, Z)$ est sans torsion ([23], No. 17); le quotient $H(B, H(F, Z))/H(B, Z) \otimes H(F, Z)$ est le produit dual ou de torsion de H. Cartan et S. Eilenberg Tor $(H(B, Z), H(F, Z))$, mais nous n'aurons besoin de cette notion que dans des cas élémentaires bien connus (voir §8.2). Signalons qu'en ce qui concerne la bigraduation on a la suite exacte:

$$(4.1)\quad 0 \to H^p(B, Z) \otimes H^q(F, Z) \to H^p(B, H^q(F, Z)) \\ \to \operatorname{Tor}(H^{p+1}(B, Z), H^q(F, Z)) \to 0.$$

Nous résumons maintenant les principales propriétés de l'algèbre spectrale.

(a) H_2 est bigradué par les sous-modules $H_2^{p,q} = H^p(B, H^q(F, M))$. On dira que p est le *degré-base*, q le *degré fibre*, $p + q$ le *degré total*; ces degrés seront notés DB, DF et D respectivement. La différentielle d_r de H_r augmente DB de r, diminue DF de $r - 1$, augmente D de 1.

(b) *L'homomorphisme* $p^*: H(B, M) \to H(E, M)$; il ne peut être non nul (pour la cohomologie à supports compacts) que si F est compacte. Dans ce cas $H_2^{p,0} = H^p(B, H^0(F, M)) = H^p(B, M)$; la différentielle d_r qui diminue DF de $r - 1$ est forcément nulle sur $H_2^{p,0} (r \geqq 2)$, et $H_{r+1}^{p,0}$ est un quotient de $H_r^{p,0}$, d'où la suite d'homomorphismes *sur*

$$H^p(B, M) = H_2^{p,0} \to H_3^{p,0} \to \cdots \to H_{p+1}^{p,0} = H_\infty^{p,0} = J^{p,0} \subset H^p(E, M)$$

(Notations du §1C), la dernière inclusion résulte du fait que $J^{p+1} \cap H^p(E, M) = 0$

[7] En fait, il y a une infinité d'algèbres spectrales correspondant chacune à une filtration caractérisée par deux entiers l, m, mais elles ne sont pas essentiellement différentes. Le théorème est énoncé ici pour la filtration $l = 0$, $m = 1$, de [24], la seule que nous utiliserons, dont la définition sera rappelée plus bas; elle vérifie la condition (1.10) et il en est de même pour la filtration de $H(E, M)$ associée. Si M n'est pas commutative, on a un théorème analogue, sauf que H_r n'est plus forcément anticommutative pour le degré total; de même si M est un module, on affirmera simplement que H_r est un module.

vu la condition (1.10). On montre que la première égalité est donnée par un isomorphisme canonique π^* tel que:[8]

$$p^* = \kappa^2_{p+1} \circ \pi^* \qquad \text{sur } H^p(B, M) \tag{4.2}$$

([24], No. 6g, [5], Exp. VII, No. 2).

(c) *L'homomorphisme* $i^*: H(X, M) \to H(F, M)$. Soit i_b^* l'homomorphisme transposé de l'injection i_b de la fibre $F_b = p^{-1}(b)$ dans E, il ne peut être non nul que si B est compact; dans ce cas il y a un isomorphisme canonique ι_b^{*8}

$$\iota_b^*: H_2^{0,q} = H^0(B, H^q(F, M)) = \underline{H^q(F_b, M)} \tag{4.3}$$

les éléments de $H_r^{0,q}$ ne peuvent être cobords pour d_r qui augmente DB de $r(r \geqq 2)$, $H_{r+1}^{0,q}$ est isomorphe au module des cocycles de $H_r^{0,q}$; on a une suite d'inclusions

$$\underline{H^q(F_b, M)} = H_2^{0,q} \supset H_3^{0,q} \supset \cdots \supset H_{2+q}^{0,q} = H_\infty^{0,q} = H^q(E, M)/J^{1,q-1}.$$

L'homomorphisme de $H^q(E, M)$ dans $H^q(F_b M)$ résultant des applications

$$H^q(E, M) \to H^q(E, M)/J^{1,q-1} = H_\infty^{0,q} \subset H_2^{0,q} = \underline{H^q(F_b, M)} \tag{4.4}$$

est i_b^* (cf. [24], No. 6f, [5] Exp. VIII, Théorème 2 et sa démonstration); le noyau de i_b^* est donc J^1; si b varie, les isomorphismes ι_b^* sont naturellement compatibles avec les identifications canoniques des modules $\underline{H^q(F_b, M)}$, considérés comme éléments du sous-faisceau constant contenu dans le faisceau $H(p^{-1}(b), M)$. Ainsi, vu (4.4), i_b^* est indépendant de b, on peut parler de l'homomorphisme $i^*: H(E, M) \to H(F, M)$.

Explicitons encore un cas particulier que nous rencontrerons fréquemment dans la suite; on dit que F est *totalement non homologue à zéro* dans E, relativement à M, si $i^*: H(E, M) \to H(F, M)$ est sur; d'autre part on dit que l'algèbre spectrale (H_r) est triviale si $d_r = 0 (r \geqq 2)$, donc si $H_2 = H_3 = \cdots = H_\infty = G(H(E, M))$.

PROPOSITION 4.1. *Soit (E, B, F, p) un espace fibré compact connexe de fibre connexe, de base localement connexe.*

Pour que l'algèbre spectrale sur K_p de cette fibration soit triviale et que $H(F, K_p) = \underline{H(F, K_p)}$, il faut et il suffit que F soit totalement non homologue à zéro dans E relativement à K_p. Dans ce cas, p^* est biunivoque, le noyau de i^* est l'idéal engendré par $p^*(H^+(B, K_p))$.[9]

On a une proposition analogue pour les coefficients entiers lorsque $H(B, Z)$ ou $H(F, Z)$ est sans torsion.

Si $H_2 = H_\infty$, p^* est biunivoque vu (4.2) et l'idéal de l'image de $p^*(H^+(B, K_p))$ dans $H_2 = G(H(E, M))$ est la réunion des modules $J^{p,q}/J^{p+1,q-1} (p > 0)$. On a $J^{n+1,-1} = 0$ puisque la filtration vérifie (1.10); pour $p + q = n$ fixé l'inclusion de $J^{p,n-p}$ dans l'idéal de $p^*(H^+(B, K_p))$ se démontre alors par récurrence des-

[8] Sa définition sera rappelée plus bas.

[9] $H^+(B, K_p)$ est l'ensemble des éléments de degrés >0 de $H(B, K_p)$.

cendante sur $p > 0$, donc J^1 est dans l'idéal de $p^*(H^+(B, K_p))$; l'inclusion contraire résulte de $p^*(H^p(B, K_p)) = J^{p,0}$ et de $J^p \cdot J^q \subset J^{p+q}$. L'idéal de $p^*(H^+(B, K_p))$ est égal à J^1, qui est le noyau de i^* d'après ce que nous avons rappelé plus haut. Pour la démonstration du reste de la Prop. 4.1, voir [24], Théorèmes 7.1 et 7.3, où [5] Exp. pl. IX.

Rappelons encore ([24], Théorème 7.2) que *si les éléments de H_2 ont des degrés totaux de même parité, (H_r) est triviale* car les différentielles d_r, qui augmentent le degré total de un, sont forcément nulles.

(d) *Homomorphismes d'algèbres spectrales.* Soient (E, B, F, p) et (E', B', F', p') deux espaces fibrés; une représentation de l'un dans l'autre est définie par deux applications continues λ: $E \to E'$ μ: $B \to B'$ telles que le diagramme (4.5) soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\lambda} & E' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ B & \xrightarrow{\mu} & B' \end{array} \tag{4.5}$$

A la représentation (4.5) est associée un homomorphisme λ^* de l'algèbre spectrale (H'_r) de (E', B', F', p') dans l'algèbre spectrale (H_r) de (E, B, F, p); (cela vaut déjà lorsque p et p' sont des applications continues quelconques, cf [23], No. 54, [5], Exp. VII). Supposons E, F, E', F' compacts connexes, les hypothèses du Théorème 4.1 remplies; alors les deux diagrammes suivants sont commutatifs

$$\begin{array}{ccc} H_2^{p,0} & \xleftarrow{\lambda^*} & H'^{p,0}_2 \\ \updownarrow{\scriptstyle \pi^*} & & \updownarrow{\scriptstyle \pi^*} \\ H^p(B, M) & \xleftarrow{\mu^*} & H^p(B', M) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H_2^{0,q} & \xleftarrow{\lambda^*} & H'^{0,q}_2 \\ \updownarrow{\scriptstyle \iota_b^*} & & \updownarrow{\scriptstyle \iota_b^*} \\ \underline{H^q(F_b, M)} & \xleftarrow{\lambda_b^*} & \underline{H^q(F'_{b'}, M)} \end{array} \tag{4.6}$$

($b' = \lambda(b)$, $\lambda_b =$ restriction de λ à $F_b = p^{-1}(b)$), *voir* [5] Exp. VII Théorème 4 et Exp. VIII, Théorème 4; ainsi λ_b^* est indépendant de b sur $H(F'_{b'}, M)$.

Soit $M = A$, supposons encore que l'on a dans H'_2 et H_2 des coefficients ordinaires, que λ_b^* est un isomorphisme sur, que $H^i(F, A) = H^i(F', A) = 0$ pour $i > s$, et enfin que μ^* est un isomorphisme de $H^j(B', A)$ sur H^j (B, A) pour $j \leqq m$.

Alors λ^* est pour les éléments de $D \leqq m - s$ un isomorphisme de H'_r sur H_r et de $H(E', M)$ sur $H(E, M)$, $(r \geqq 2)$.

Démonstration. D'après les hypothèses et la formule (4.1) λ^* est un isomorphisme de H'_2 sur H_2 pour les éléments de $DB \leqq m$; comme d_2 augmente D de 1, λ^* est un isomorphisme sur pour les cobords de $D \leqq m$ et pour les cocycles de $D \leqq m - 1$, c'est donc un isomorphisme de H'_3 sur H_3 pour les éléments de degré total $\leqq m - 1$; de même, d_3 augmentant aussi D de 1, λ^* est un isomorphisme de H'_4 sur H_4 pour les éléments de $D \leqq m - 2$, et finalement c'est un isomorphisme de H'_{s+2} sur H_{s+2} pour les éléments de $D \leqq m - s$. Mais nous avons supposé d'autre part que $H(F, A)$ et $H(F', A)$ n'ont pas d'élément non nul de degré $>s$; les degrés fibres dans H'_r et H_r $(r \geqq 2)$ sont donc compris entre 0 et s et d_r, qui diminue DF de $r - 1$, est nulle pour $r \geqq s + 2$, et ainsi $H'_{s+2} = H'_\infty = G(H(E', A))$, $H_{s+2} = H_\infty = G(H(E, A))$.

Nous obtenons ainsi un isomorphisme de H'_r sur H_r pour $D \leqq m - s$, r quelconque >2 et enfin un isomorphisme de $H^i(E', A)$ sur $H^i(E, A)$, $(i \leqq m - s)$, (cf. §1D).

La quatrième définition de la transgression mise à part, ce qui précède contient presque toutes les propriétés de l'algèbre spectrale des espaces fibrés que nous utiliserons. Les remarques suivantes n'auront d'emploi que dans les §5 et 24; pour simplifier nous supposerons ci-dessous l'espace fibré (E, B, F, p) compact.

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ des A-couvertures fines de E et de B, on montre aisément que $p^{-1}(\mathcal{B}) \bigcirc \mathcal{E}$ est une A-couverture fine de E; nous noterons aussi M un faisceau constant isomorphe à la A-algèbre M, alors (§3):

$$H(p^{-1}(\mathcal{B}) \bigcirc \mathcal{E} \bigcirc M) = H(p^{-1}(\mathcal{B}) \bigcirc \mathcal{E} \otimes M) = H(E, M) \tag{4.7}$$

$\mathcal{C} = p^{-1}(\mathcal{B}) \bigcirc \mathcal{E} \bigcirc M$ est bigradué de façon évidente, mais le degré qui induit la graduation de $H(E, M)$ par les sous-modules $H^i(E, M)$ est le degré total. On filtre $\mathcal{C}$ par les sous-modules

$$S^p = \textstyle\sum_{i \geqq p} p^{-1}(\mathcal{B}^i) \bigcirc \mathcal{E} \bigcirc M \tag{4.8}$$

la condition $0 \leqq f(x) \leqq$ degré x est bien vérifiée pour le degré total; l'algèbre spectrale correspondante (H_r) est celle du Théorème 4.1 ([24], Théorème 4.1, [5], Exp. VIII), on démontre qu'elle est indépendante des A-couvertures fines choisies ([23], No. 50).

Soit u l'élément neutre de $\mathcal{E}$, il y a un homomorphisme canonique $p': \mathcal{B} \bigcirc M \to p^{-1}(\mathcal{B}) \bigcirc u \bigcirc M$, c'est celui qui associe $k \bigcirc u \bigcirc m$ à $k \bigcirc m$; il est même biunivoque ([23], Prop. 37.5, [5] Exp. II Théorème 7.5). On peut donc identifier $\mathcal{B} \bigcirc M$ à $p^{-1}(\mathcal{B}) \bigcirc u \bigcirc M$, l'ensemble des "cochaînes de base" de $\mathcal{C}$; l'homomorphisme de $H(\mathcal{B} \bigcirc M) = H(B, M)$ dans $H(\mathcal{C}) = H(E, M)$ induit par p' est dans la théorie de Leray p^* par définition; on voit aisément que si l'on identifie $H(\mathcal{B} \bigcirc M)$ et $H(\mathcal{C})$ aux algèbres de cohomologie d'Alexander-Spanier de B et E par les isomorphismes canoniques du théorème d'unicité, p^* se transporte en l'homomorphisme naturel défini dans la cohomologie d'Alexander-Spanier, mais cela ne jouera pas de rôle ici.

LEMME 4.1. *Pour filtration* (4.8) *de* $\mathcal{C}$, *on a, si* F *est connexe*

$$C_1^{p,0} = p^{-1}(\mathcal{B}) \bigcirc u \bigcirc M = p'(\mathcal{B} \bigcirc M)$$

(voir [5], Exp. VII, Lemme 4). Par conséquent $C_2^{p,0}$ est l'ensemble des cocycles de $p'(\mathcal{B} \bigcirc M)$ et $D_1^{p,0} = dC_1^{p-1,0}$ celui de ses cobords, d'où un isomorphisme canonique:

$$\pi^*: H_2^{p,0} = C_2^{p,0}/D_1^{p,0} = H^p(B, M)$$

(car $C_1^{p+1,-1}$ est nul), qui est l'isomorphisme mentionné plus haut sous b).

Soit b un point quelconque mais fixé de B, et $F_b = p^{-1}(b)$ on a pour la section de $\mathcal{C}$ par F_b

(4.9) $\mathcal{C}' = F_b(\mathcal{C}) = p^{-1}(b).p^{-1}(\mathcal{B}) \bigcirc F_b(\mathcal{E} \bigcirc M) = b\mathcal{B} \otimes F_b\mathcal{E} \otimes M$

(cela résulte de lemmes simples sur les complexes, cf. [5] Exp. VII ou [23], formule (30.6) et lemme 32.2); $F_b\mathcal{E}$ et $b\mathcal{B}$ sont des A-couvertures fines de F_b et b, ils sont sans torsion, $H(F_b\mathcal{E} \bigcirc M) = H(F_b, M)$ et $b\mathcal{B}$ a une cohomologie triviale. Filtrons $\mathcal{C}'$ par

$$S'^p = \textstyle\sum_{i \geqq p} b\mathcal{B}^i \otimes F_b\mathcal{E} \otimes M. \tag{4.10}$$

On a donc $F_b(S) \subset S'^p$, la section induit un homomorphisme des algèbres spectrales (H_r) et (H'_r) de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, et un homomorphisme de $H(E, M)$ dans $H(F_b, M)$ qui est i_b^* par définition; on a en particulier $i^*(J^p) \subset J'^p$; l'algèbre spectrale (H'_r) se calcule facilement ([23], No. 17, [5], Exp. VI, Théorème 4). On trouve: $H'_0 = G(\mathcal{C}')$, d'_0 est la differentielle partielle par rapport à $F_b\mathcal{E}$, par conséquent

$$H'_1 = b\mathcal{B} \otimes H(F_b, M); \qquad H_1'^{p,q} = b\mathcal{B}^p \otimes H^q(F_b, M) \tag{4.11}$$

d'_1 est la différentielle partielle par rapport à $b\mathcal{B}$, d'où

$$H'_2 = H(F_b, M); \qquad H'^{0,q}_2 = H^q(F_b, M); \qquad H'^{p,q}_2 = 0 \quad (p > 0) \tag{4.12}$$

donc $d'_r = 0$ pour $r \geqq 2$, $H'_2 = H'_\infty = G(H(F_b, M))$ n'a que des éléments de degré filtrant nul; cela signifie que $J'^1 = 0$ et que $H(F_b, M)$ est naturellement isomorphe à $G(H(F_b, M)) = H'_2$; on voit aussi en passant que $i_b^*(J^1) = 0$, ce qui a déjà été mentionné plus haut sous c). Enfin on montre que la section est un isomorphisme de $H_2^{0,q} = H^0(B, H^q(F, M))$ sur $\underline{H^q(F_b, M)}$; c'est l'isomorphisme ι_b^* annoncé sous c), (cf. [5], Exp. VIII).

§5. La transgression

La transgression dans un espace fibré (E, B, F, p), (que nous supposerons toujours connexe) relativement aux coefficients M, est un homomorphisme d'un sous-module de $H^s(F, M)$ dans un quotient de $H^{s+1}(B, M)$, $(s = 0, 1, \cdots)$. Comme nous l'avons déjà dit, elle jouera un rôle fondamental dans ce travail; nous en donnerons ici quatre définitions, dont nous montrerons l'équivalence (dans leur domaine commun de définition); les deux premières sont très générales tandis que les deux dernières, formulées ici dans le cadre de la théorie de Leray, sont valables pour les espaces compacts.

Dans le §5, $H(X, M)$ est l'algèbre de cohomologie d'Alexander-Spanier de l'espace X à valeurs dans M, à supports non nécessairement compacts, $C(X, M)$ est l'algèbre des cochaînes d'Alexander-Spanier de X à valeurs dans M.

1ère définition. L'injection i_b d'une fibre F_b dans E induit un homomorphisme i'_b canonique de $C(E, M)$ *sur* $C(F_b, M)$, la projection p induit un homomorphisme canonique p' de $C(B, M)$ dans $C(E, M)$ qui est biunivoque; on identifie $C(B, M)$ à son image par p', dont les éléments sont nommés les cochaînes de base.

$h \in H^s(F_b, M)$ est transgressif s'il existe $c \in C(E, M)$ telle que $i'_b(c)$ soit un cocycle de h et que dc soit une cochaîne de base; c est une cochaîne de transgression pour h, dc est naturellement un cocycle de $C(B, M)$, on peut dire que sa classe de cohomologie est une image de h dans $H^{s+1}(B, M)$ par transgression, mais elle n'est pas univoquement déterminée; soit en effet $K^{s+1}(B, M)$ le sous-module de $H^{s+1}(B, M)$ formé des éléments x ayant la propriété suivante: x contient un cocycle qui est dans $C(E, M)$ cobord d'une cochaîne annulée par i'_b. On vérifie immédiatement que l'image d'un élément transgressif est déterminée à un élément de $K^{s+1}(B, M)$ près; nous obtenons donc un homomorphisme du sous-module des éléments transgressifs de $H^s(F_b, M)$ dans $H^{s+1}(B, M)/K^{s+1}(B, M)$, c'est la transgression.

2ème définition. Elle est due à J. P. Serre ([29], No. 9); on considère les applications

$$H^s(F_b, M) \xrightarrow{\delta} H^{s+1}(E \bmod F_b, M) \xleftarrow{q^*} H^{s+1}(B, M) \tag{5.1}$$

δ est l'homomorphisme cobord de la suite exacte de cohomologie relative, de E mod F_b, q^* est le composé de l'isomorphisme canonique de $H^{s+1}(B, M)$ sur $H^{s+1}(B \bmod b, M)$ et de l'homomorphisme canonique $p^*: H^{s+1}(B \bmod b, M) \to H^{s+1}(E \bmod F_b, M)$ induit par p.

(5.1) permet de définir un homomorphisme d'un sous-module de $H^s(F_b, M)$ dans un quotient de $H^{s+1}(B, M)$, il est immédiat que c'est la transgression au sens de la 1ère définition.

Remarque. Ces deux définitions peuvent naturellement être données dans d'autres cohomologies, par exemple en cohomologie singulière comme cela est fait par J. P. Serre [29]. A priori ces définitions dépendent de la fibre, en fait il n'en est rien comme nous le verrons ici tout au moins si E est compact, F connexe

Pour les deux dernières définitions, nous supposons E compact, F connexe.

3ème définition. Elle est analogue à la première mais utilise des cochaînes prises dans un complexe particulier, celui qui permet de construire l'algèbre spectrales de la fibration, et dont la définition a été rappelée au §4. Soient de nouveau $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ des A-couvertures fines de E et B, $C = p^{-1}(\mathcal{B}) \bigcirc \mathcal{E} \bigcirc M$; on a déjà défini un isomorphisme p' de $\mathcal{B} \bigcirc M$ dans C, sur $p^{-1}(\mathcal{B}) \bigcirc u \bigcirc M$; les éléments de ce dernier complexe sont les cochaînes de base. On dira alors que *$h \in H^s(F_b, M)$ est transgressif s'il existe $c \in \mathcal{C}$ telle que $F_b c$ soit un cocycle de h et que dc soit une cochaîne de base*. Soit $L^{s+1}(B, M)$ l'ensemble des éléments x de $H^{s+1}(B, M)$ ayant la propriété suivante: Il existe c $\in \mathcal{C}$ tel que $F_b c = 0$ et que dc soit un cocycle de x; en faisant correspondre à un élément transgressif la classe de cohomologie de dc on définit un homomorphisme d'un sous-module de $H^s(F_b, M)$ dans un quotient $H^{s+1}(B, M)/L^{s+1}(B, M)$ de $H^{s+1}(B, M)$, c'est la transgression. Montrons que cette définition équivaut à la précédente; soit $\mathfrak{N}$ le noyau de la section de $\mathcal{C}$ par F_b, c'est donc l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}$ dont le support ne rencontre pas F_b, et de même soit $\mathcal{P}$ le noyau de la section de $\mathcal{B} \bigcirc M$ par b. On a le diagramme commutatif suivant, où les lignes sont exactes:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathfrak{N} & \to & \mathcal{C} & \to & F_b\mathcal{C} & \to & 0 \\
 & & \uparrow p' & & \uparrow p' & & \uparrow p' & & \\
0 & \to & \mathcal{P} & \to & \mathcal{B} \bigcirc M & \to & b\mathcal{B} \otimes M & \to & 0
\end{array}
\tag{5.2}
$$

d'où l'on tire le diagramme commutatif (5.3), où les lignes sont exactes:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\to & H^s(F_b, M) & \xrightarrow{\delta} & H^{s+1}(\mathfrak{N}) & \to & H^{s+1}(E, M) & \xrightarrow{i^*} & H^{s+1}(F_b, M) & \to \\
 & & & \uparrow p^* & & \uparrow p^* & & & \\
\to & H^s(b, M) & \to & H^{s+1}(\mathcal{P}) & \xrightarrow{f} & H^{s+1}(B, M) & \to & H^{s+1}(b, M & \to
\end{array}
\tag{5.3}
$$

f est un isomorphisme, soit $q^*: H^{s+1}(B, M) \to H^{s+1}(\mathfrak{N})$ l'homomorphisme obtenu en composant f^{-1} et p^*; il est alors clair que la 3ème définition de la transgression est équivalente à celle que l'on obtient par

$$
H^s(F_b, M) \to H^{s+1}(\mathfrak{N}) \leftarrow H^{s+1}(B, M).
\tag{5.4}
$$

On a déjà dit (§3) que $H(\mathfrak{N})$ et $H(\mathcal{P})$ s'identifiaient canoniquement à $H(E \bmod F_b, M)$ et à $H(B \bmod p, M)$; cette identification est naturellement telle que (5.3) devienne l'homomorphisme des suites exactes de cohomologie relative associé à p (cf. [5], Exp. VII, Appendice), mais alors (5.4) devient exactement (5.1), d'où l'équivalence annoncée.

Notations. $T^s(F_b, M)$ est le sous-module des éléments transgressifs de $H^s(F_b, M)$, et τ est l'homomorphisme de transgression.

Il y a quelquefois intérêt à modifier légèrement la troisième définition en élargissant la notion de cochaîne de transgression, de la manière suivante, qui m'a été signalée par J. Leray.

Disons que $c \in \mathcal{C}$, de degré $s \geqq 1$, *est une cochaîne de transgression au sens large si dc est une cochaîne de base*. On n'exige donc pas que F_bc soit un cocycle, néanmoins c définit un élément bien déterminé de $H^s(F_b, M)$, que nous noterons $\omega(c)$; en effet

$$
F_b(p^{-1}(\mathcal{B}) \bigcirc u \bigcirc M) \cong b\mathcal{B} \otimes M
$$

a une cohomologie triviale et, puisque $dc \in p^{-1}(\mathcal{B}) \bigcirc u \bigcirc M$, on a

$$
dF_bc = F_b(dc) = F_b(dk), \qquad (Dk = s - 1, k \in p^{-1}(\mathcal{B}) \bigcirc u \bigcirc M)
$$

et $F_b(c - k)$ est un cocycle; sa classe de cohomologie dans $H^s(F_b, M)$ ne dépend pas de k, car si $F_b(c - k')$ est un cocycle, (k' de base), $F_b(k - k')$ est un cocycle faisant partie de $b\mathcal{B} \otimes M$, donc

$$
F_b(k - k') = dF_bm \ (Dm = s - 1, m \in p^{-1}(\mathcal{B}) \bigcirc u \bigcirc M)
$$

et $F_b(c - k') = F_b(c - k) + dF_b m$ est cohomologue à $F_b(c - k)$; la classe $\omega(c)$ de $c - k$ est bien déterminée par c. De plus, k étant de base, dc et $d(c - k)$ sont dans le même élément y de $H^{s+1}(B, M)$, par conséquent: *Si c est une cochaîne de transgression au sens large, $\omega(c)$ est transgressif et la classe de dc en est une image par transgression.*

Evidemment si $\omega(c) = 0$ il existe k de base telle que $F_b(c - k) = 0$, donc $L^{s+1}(B, M)$ est l'ensemble des classes de cohomologie des éléments dc où c est une cochaîne de transgression au sens large telle que $\omega(c) = 0$.

Remarquons qu'une cochaîne de transgression au sens large de degré s fait partie de $C^{0,s}_{s+1}$ par définition et que $\omega(c)$ peut être aussi défini comme l'image de c par la suite d'homomorphismes

$$C^{0,s}_{s+1} \xrightarrow{\nu^{0,s}_{s+1}} H^{0,s}_{s+1} \subset H^{0,s}_2 \xrightarrow{\iota_b^*} H^s(F_b, M)$$

ou $\nu^{0,s}_{s+1}$ est la projection de $C^{0,s}_{s+1}$ sur $H^{0,s}_{s+1} = C^{0,s}_{s+1}/C^{1,s-1}_s + D^{0,s}_s$; cela résulte immédiatement de la définition de ι_b^* et du fait que $\nu^{0,s}_{s+1}(c - k) = \nu^{0,s}_{s+1}(c)$ puisque k est de base, donc dans $C^{1,s-1}_s$.

LEMME 5.1. *Soient c une cochaîne de transgression au sens large et m un cocycle de base cohomologue à dc.*

Alors il existe une cochaîne de transgression au sens large c' telle que $dc' = m$ et que $\omega(c') = \omega(c)$.

En effet, $dc = m + dk$, (k de base), par hypothèse; on pose $c' = c - k$. Ce lemme sera utilisé dans le §25.

4ÈME DÉFINITION. On considère l'algèbre spectrale (H_r) de (E, B, F, p), en supposant donc les hypothèses du théorème 4.1 vérifiées; $H^{0,s}_{s+1}$ $(r \geqq 2)$ est le sous-module de $H^{0,s}_2$ formé des éléments qui sont des cocycles pour $d_2, \cdots, d_s$; la différentielle d_{s+1} est un homomorphisme de $H^{0,s}_{s+1}$ dans $H^{s+1,0}_{s+1}$, nous voulons montrer que c'est la transgression; de façon précise:

PROPOSITION 5.1. *Identifions $H^{s+1}(B, M)$ et $\underline{H^s(F_b \cdot M)}$ à $H^{s+1,0}_2$ et $H^{0,s}_2$ par les isomorphismes π^* et ι_b^*. Alors $L^{s+1}(B, M)$ et $T^s(F_b, M)$ se transportent en le noyau de κ^2_{s+1} et en $H^{0,s}_{s+1}$, on a le diagramme commutatif* $(s \geqq 1)$:

$$(5.5)\qquad \begin{array}{ccccc}
T^s(F_b, M) & \xrightarrow{\tau} & H^{s+1}(B, M)/L^{s+1}(B, M) & \leftarrow & H^{s+1}(B, M) \\
\updownarrow \iota_b^* & & \updownarrow \pi^* & & \updownarrow \pi^* \\
H^{0,s}_{s+1} & \xrightarrow{d_{s+1}} & H^{s+1,0}_{s+1} & \xleftarrow{\kappa^2_{s+1}} & H^{s+1,0}_2
\end{array}$$

F_b étant supposé connexe, la transgression n'a d'intérêt que pour $s \geqq 1$; soit L'^{s+1} le noyau de $\kappa^2_{s+1}: H^{s+1.0}_2 \to H^{1+1,0}_{s+1}$; évidemment $L'^2 = 0$; pour $s \geqq 2$, on a une suite d'inclusions

$$(5.6)\qquad H^{s+1,0}_{s+1} \supset (\kappa^2_s)^{-1} d_s H^{1,s-1}_s \supset (\kappa^2_{s-1})^{-1} d_{s-1} H^{2,s-2}_{s-1} \supset \cdots \supset d_2 H^{s-1,1}_2$$

et $L'^{s+1} = (\kappa^2_s)^{-1} d_s H^{1,s-1}_s$; nous montrerons d'abord que L'^{s+1} est égal à $L^{s+1}(B,M)$, que nous noterons ici L^{s+1}

(i) *A montrer*: $L^{s+1} \subset L'^{s+1}$ $(s \geqq 1)$. Soit $x \in L^{s+1}$, il existe donc $c \in \mathfrak{C}$ telle que $F_b c = 0$ et que dc soit un cocycle de base, appartenant à x; c étant naturellement supposé non nul, il existe p $(0 \leqq p \leqq s)$ tel que $c \in S^p$, donc $c \in C_{s+1-p}^{p,p-s}$, puisque dc est de base. *Si* $p = s$, c est lui-même une cochaîne de base (Lemme 4.1), donc $x = 0$; soient maintenant $0 \leqq p < s$ et c^* la projection de c dans $H_{s+1-p}^{p,s-p}$; par définition de d_{s+1-p} (et de π^*), on a

$$\kappa_{s+1-p}^{2} x = d_{s+1-p} c^*$$

si $p > 0$, on a $2 \leqq s + 1 - p \leqq s$ et

$$x \in (\kappa_{s+1-p}^{2})^{-1} d_{s+1-p} H_{s+1-p}^{p,s-p} \subset L'^{s+1}$$

si $p = 0$ désignons par $\hat{c}$ la projection de c dans $H_2^{0,s}$; ce dernier est isomorphe à $\underline{H^s(F_b\,, M)}$ par un isomorphisme ι_b^* induit par la section (§4), donc $F_b c = 0$ implique $\hat{c} =$ d'où

$$\kappa_{s+1}^{2} x = d_{s+1} c^* = d_{1+s} \kappa_{s+1}^{2}\, \hat{c} = 0$$

donc $x \in L'^{s+1}$.

(ii) *A montrer*: $L'^{s+1} \subset L^{s+1}$ $(s \geqq 1)$; il n'y a rien à démontrer pour $s = 1$ puisque $L'^2 = 0$; pour $s \geqq 2$, on prouvera par récurrence sur a, $(2 \leqq a \leqq s)$, que:

$$(5.6)_a \qquad (\kappa_a^{2})^{-1} d_a H_a^{s-a+1,a-1} \subset L^{s+1}.$$

Supposons $(5.6)_{a-1}$ démontré, soit $x \in (\kappa_a^{2})^{-1} d_a H_a^{s-a+1,a-1}$ et $h \in H_a^{s-a+1,a-1}$ tels que $\kappa_a^{2} x = d_a h$.

Soit c un représentant de h dans $C_a^{s-a+1,a-1} \subset C_{s+1}^{0,s}$, c'est une co chaîne de transgression au sens large et comme $s - a + 1 > 0$, on a $\omega(c) = 0$ et la classe de cohomologie y de dc fait partie de L^{s+1}; par définition de d_a et de π^* on a $d_a h = \kappa_a^{s} y$ donc $y = x + x'$, x' étant dans le noyau de κ_a^{2}, c'est à dire dans $(\kappa_{a-1}^{2})^{-1} d_{a-1} H_{a-1}^{s-a,a-2}$, qui fait partie de L^{s+1} d'après l'hypothèse de récurrence; ainsi $x = y - x'$ est dans L^{s+1}. Démonstration analogue pour $a = 2$.

(iii) *A montrer*: $T^s(F_b\,, M) = H_{s+1}^{0,s}$ et $\tau = d_{s+1}$.

Si $h \in T^s(F_b\,, M)$, une cochaîne de transgression c pour h est un élément de $C_{s+1}^{0,s}$ tel que $\omega(c) = h$, d'où $T^s(F_b\,, M) \subset H_{s+1}^{0,s}$. De plus si $y \in H^{s+1}(B, M)$ est la classe de dc, on a d'après i), ii) et la définition de d_{s+1}

$$d_{s+1} h = \kappa_{s+1}^{2} x = \tau h.$$

Il reste à montrer que $H_{s+1}^{0,s} \subset T^s(F_b\,, M)$; or, soit $h' \in H_{s+1}^{0,s}$; un quelconque de ses représentants dans $C_{s+1}^{0,s}$ est une cochaîne de transgression au sens large et $\omega(c) \in T^s(F_b\,, M)$, d'où l'inclusion annoncée.

Remarques. (1) La quatrième définition montre que $T^s(F_b\,, M) \subset \underline{H^*(F_b\,, M)}$ et que les trois premières définitions sont indépendantes de la fibre particulière considérée; de même la troisième définition ne dépend pas des A-couvertures fines $\mathcal{E}$ et $\mathfrak{B}$ choisies.

(2) Si E et F sont des polyèdres ou plus généralement des espaces compacts HLC, les suites exactes de cohomologie relative d'Alexander-Spanier et singu-

lière s'identifient. La quatrième définition est donc équivalente à la deuxième prise en cohomologie singulière, donc aussi à la première formulée à l'aide des cochaînes singulières.

(3) Pour un espace fibré quelconque, il y en a en cohomologie singulière aussi équivalence entre la première, la deuxième et la quatrième définition, (H_r) étant alors l'algèbre spectrale de la fibration en cohomologie singulière introduite par J. P. Serre ([29], No. 9). Enfin, dans le cas de la fibration d'un groupe de Lie compact par un sous-groupe fermé connexe, la première définition, énoncée à l'aide des formes différentielles extérieures, admet aussi une traduction dans l'algèbre spectrale de J. L. Koszul ([21], deux dernières lignes).

Chapitre II. Le Theoreme de Hopf

On sait que le théorème de Hopf [19] concerne l'algèbre de cohomologie d'un espace muni d'un produit vérifiant certaines conditions; ces hypothèses se traduisent par une propriété de l'algèbre de cohomologie qui suffit pour faire la démonstration. Dans le §6, nous partirons de cette dernière et établirons un théorème de Hopf directement formulé pour des algèbres. Pour l'énoncé que nous avons en vue, il nous faudra supposer le corps de base *parfait* (du moins pour la démonstration ci-dessous), mais cette hypothèse s'avérera superflue dans le cas topologique, traité dans le §7.

§6. Le théorème de Hopf algébrique

6.1. H sera une algèbre sur un corps K_p, graduée par des sous-espaces $H^i (i \geqq 0)$, anticommutative, munie d'un élément neutre 1 qui est base de H^0. On note Dx le degré de l'élément homogène x; on dit que $h \in H$ est de *hauteur infinie* si $h^r \neq 0$, pour tout entier $r \geqq 0$, qu'il est de *hauteur* s si $h^{s-1} \neq 0$, $h^s = 0$; on pose bien entendu $x^0 = 1$ pour tout $x \in H$.

Pour simplifier les notations, nous supposerons que H est de *type fini*, c'est à dire que chaque sous-espace H^i est de dimension finie. Elle admet donc un système dénombrable de générateurs. Rappelons que les éléments homogènes de degrés > 0, $x_1, x_2, \cdots$ sont dits former un *système minimal* de générateurs de H si tout $h \in H$ est somme d'un polynômes en les x_i et d'un multiples scalaire de 1 et si x_k n'est pas un polynôme en les x_i d'indices $\neq k$ $(k = 1, 2, \cdots)$.

Definition 6.1. *L'ensemble* (x_i), $(i = 1, 2, \cdots)$, *d'éléments homogènes de* H, $(0 < Dx_i \leqq Dx_j$ *si* $i \leqq j)$ *est un système de générateurs du type* (M) *de* H *s'il vérifie les deux conditions*:

M 1: *C'est un système minimal de générateurs de* H.

M 2: *La hauteur de* x_k *est plus petite ou égale à la hauteur de tout élément* $x_k + P(x_{k-1}, \cdots, x_1)$, *où* $P(x_{k-1}, \cdots, x_1)$ *est un polynôme en* $x_{k-1}, \cdots, x_1$ $(k = 1, 2, \cdots)$.

Une construction immédiate par récurrence montre l'existence d'au moins un système de générateurs de type (M), mais un système minimal quelconque ne vérifie pas forcément M 2.

Definition 6.2. *H est une algèbre de Hopf s'il existe un homomorphisme d'algè-*

bres graduées $f: H \to H \otimes H$ *et deux automorphismes* ρ *et* σ *de* H *tels que pour tout* $h \subset H$ *homogène l'on ait*:

$$f(h) = \rho(h) \otimes 1 + 1 \otimes \sigma(h) + x_1 \otimes y_1 + \cdots + x_s \otimes y_s \quad (0 < Dx_i < Dh). \tag{6.1}$$

Nous supposerons dans la suite que ρ et σ sont l'identité; ce n'est pas restreindre la généralité car on se ramène à ce cas en composant f et l'automorphisme $x \otimes y \to \rho^{-1}(x) \otimes \sigma^{-1}(y)$ de $H \otimes H$.

THEOREME 6.1. *Soit* H *une algèbre de Hopf de type fini, sur un corps* K_p *parfait, et* (x_i), $(i = 1, 2, \cdots)$, *un système de générateurs de type* (M), s_i *la hauteur de* x_i, *(éventuellement infinie).*

Alors les monômes $x_1^{r_1} \cdot x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k} \cdots$, $(0 \leqq r_i < s_i$, r_i *nul sauf pour un nombre fini d'indices), forment une base d'espace vectoriel sur* K_p *de* H.

Si $p = 0$, *tout système minimal de générateurs est de type* (M).

COMPLEMENT. *Si* $p = 2$, s_i *est infini ou une puissance de* 2. *Si* $p \neq 2$: *pour* Dx_i *impair*, $s_i = 2$, *pour* Dx_i *pair*, s_i *est une puissance de* p *ou infini, toujours infini quand* $p = 0$.

Ce théorème affirme en somme que H est l'algèbre associative engendrée par les x_i avec comme seules relations celles qui sont fournies par l'anticommutation et la nilpotence éventuelle de certains éléments; joint au complément, il montre aussi qu'une algèbre de Hopf peut toujours être envisagée comme produit tensoriel (gauche) d'algèbres de Hopf à un générateur. Il résulte évidemment du Théorème 6.1 que si $P(x_k, \cdots, x_1) = 0$ est une relation entre certains x_i (P polynôme), et si P_i est la dérivée partielle de P par rapport à x_i, alors $P_i(x_k, \cdots, x_1) = 0$ est aussi vraie; rappelons que dans la formulation de J. Leray du théorème de Hopf (voir loc. cit.[3]), on ne peut dériver que par rapport à une variablede degré maximum.

Pour exprimer commodément le Théorème 6.1 nous introduirons encore la définition suivante, valable pour toute algèbre H sur K_p vérifiant les conditions du début de 6.1.

DEFINITION 6.3. *Un ensemble d'éléments* (x_i) *de* H *est* p*-semi-libre si*

(1) *les monômes* $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k} \cdots$ $(0 \leqq r_i < s_i$, r_i *nul sauf pour un nombre fini d'indices,* s_i *hauteur de* x_i, *év. infinie), sont linéairement indépendants.*

(2) *Si* $p = 2$, s_i *est infini ou une puissance de deux; si* $p \neq 2$ *et* Dx_i *pair*, s_i *est infini ou une puissance de* p, *toujours infini pour* $p = 0$.

Notre théorème affirme donc que dans une algèbre de Hopf sur un corps parfait, tout système de générateurs de type (M) est p-semi-libre, en particulier il y a toujours un système p-semi-libre de générateurs.

6.2. La démonstration du Théorème 6.1 est l'objet des Nos. 6.3, 6.4 et 6.5; ici nous rassemblons quelques remarques préliminaires et fixons des notations.

(a) C_s^r sera le coefficient binomial $\binom{r}{s}$; on utilisera constamment le fait facile à démontrer que $C_s^r \equiv 0 \bmod p$, p premier, pour tout s vérifiant $0 < s < r$ équivaut à: r est une puissance de p (ou un). En particulier, si r est une puissance de p, la r-ième puissance d'une somme de termes faisant partie du centre de H (ou de $H \otimes H$) est la somme des puissances r-ièmes de ces termes.

(b) *Si* $p \neq 2$ et si Dx est impair, $x \cdot x = 0$, aussi remarquons-nous une fois pour toutes que si nous considérons x^s avec $s > 1$, c'est que ou bien $p = 2$, ou bien Dx est pair; dans les deux cas, x est dans le centre de H et chaque terme de $f(x)$ figurant dans (6.1) est dans le centre de $H \otimes H$; on pourra les traiter comme variables commutatives dans le calcul de $(f(x))^s$.

(c) $(x_1, \cdots, x_k)$ étant l'idéal engendré dans H par $x_1, \cdots, x_k$, nous noterons I_k l'idéal $(x_1, \cdots, x_k) \otimes H$ de $H \otimes H$; on a alors pour le système (x_i) de l'énoncé, les congruences modulo I_{k-1} :

$$f(x_k) \equiv x_k \otimes 1 + 1 \otimes x_k; \qquad f(x_i) \equiv 1 \otimes x_i \qquad (i < k)$$

$$(6.2) \quad f(x_k^{r_k} \cdots x_k^{r_1}) \equiv x_k^{r_k} \otimes x_{k-1}^{r_{k-1}} \cdots x_1^{r_1} + \textstyle\sum_{0 \leqq i < r_k} C_i^{r_k}(x_k^i \otimes x_k^{r_x - i})(1 \otimes x_{k-1}^{r_{k-1}} \cdots x_1^{r_1}).$$

6.3. Nous appellerons *monôme normal* de H un produit $x_k^{r_k} x_{k-1}^{r_{k-1}} \cdots x_1^{r_1}$ où $0 < r_k < s_k$, $0 \leqq r_i < s_i (0 < i < k)$; par degré d'un tel monôme nous entendons toujours son degré en tant qu'élément de H, c'est à dire $(r_1 Dx_1 + \cdots + r_k Dx_k)$; un monôme normal de $H \otimes H$ sera un produit tensoriel $a \otimes b$ de deux monômes normaux a et b de H. Notre théorème affirme essentiellement que les monômes normaux de H forment avec l'élément neutre une base d'espace vectoriel sur K_p de H; il est clair que tout élément de H est combinaison linéaire finie (à coefficients dans K_p) de monômes normaux et de l'élément neutre; il suffit donc de démontrer l'indépendance linéaire des monômes normaux de degré i ($i = 1, 2, \cdots$), ce que nous ferons par récurrence sur le degré; c'est trivial pour $i = 1$, supposons le vrai pour $i < n$; il s'ensuit tout d'abord:

Deux monômes normaux de degrés $<n$ *ne sont égaux en tant qu'éléments de* H *que s'ils sont formellement identiques.* Les monômes $a \otimes b$, où a et b parcourent les monômes normaux de degrés $<n$ sont linéairement indépendants dans $H \otimes H$ et ainsi *deux combinaisons linéaires* (*sans répétition*) *de tels monômes ne sont égales en tant qu'éléments de* $H \otimes H$ *que si elles sont formellement identiques* (à l'ordre des termes près)

Soit $P(x_k, \cdots, x_1)$ une combinaison linéaire finie de monômes normaux de degré n, à coefficients non nuls, k étant le plus grand indice tel que x_k figure dans P; nous ordonnons les monômes de P par ordre lexicographique décroissant: $x_i^{r_i} x_{i-1}^{r_{i-1}} \cdots x_1^{r_1}$ vient avant $x_j^{t_j} x_{j-1}^{t_{j-1}} \cdots x_1^{t_1}$ si $i > j$ ou pour $i = j$ si la première différence $(r_i - t_i), \cdots, (r_1 - t_1)$ non nulle est positive. On peut écrire

$$(6.3) \qquad P(x_k, \cdots, x_1) = x_k^r Q(x_{k-1}, \cdots, x_1) + R(x_k, \cdots, x_1)$$

où Q et R sont des sommes de monômes normaux, x_k n'intervenant (éventuellement) dans R qu'avec des exposants $<r$; nous notons donc r la plus grande puissance de x_k, qui jouera dans la démonstration un rôle particulier; notre but est de tirer une contradiction de la supposition $P = 0$.

6.4. *A montrer*: *Si* $P = 0$, Q *est une constante*, r *est une puissance de* p *pour* $p \neq 0$, *est égal à* 1 *pour* $p = 0$.

En utilisant le No. 6.2, on voit que

$$f(x_kQ) = x_k^r \otimes Q + \sum_{0\leqq i<r} C_i^r(x_k^i \otimes x_r^{r-i})(1 \otimes Q) \text{ mod. } I_{k-1}$$

et que $f(R)$ ne contient pas de terme $x_k^i a \otimes x_k^j b$ avec $i + j = r$. Si maintenant Q est de degré >0, alors x_k^r et Q sont de degrés $<$n, on peut appliquer le No. 6.3; pour que $f(P) = 0$, il faut que chaque monôme normal de $x_k^r \otimes Q$ se retrouve identiquement dans $f(P) - x_k^r \otimes Q$ mais cela est impossible d'après ce que nous venons de dire.

Ainsi $rDx_k = n$, Q est une constante non nulle, que l'on peut supposer être égale à 1. Si maintenant $r > 1$ et si de plus, pour $p \neq 0$, r n'est pas une puissance de p, alors $f(x_k^r Q) = f(x_k^r)$ contient un terme $C_i^r(x_k^i \otimes x_k^{r-i})$, $(0 < i < r)$, non nul et le monôme normal $x_k^i \otimes x_k^{r-i}$ ne peut se retrouver dans $f(P) - C_i^r(x_k^i \otimes x_k^{r-i})$, donc $f(P) \neq 0$. Cela montre: Pour $p = 0$, $r = 1$, pour $p \neq 0$, r est une puissance de p ou 1; mais si $r = 1$, $P = 0$ signifie $x_k = -R(x_{k-1}, \cdots, x_1)$ ce qui est absurde puisque le système (x_i) est minimal, et démontre notre théorème pour $p = 0$.

Remarque. Nous n'avons utilisé jusqu'à présent que la condition M 1; pour $p = 0$, notre théorème et sa démonstration valent donc pour tout système minimal; toujours dans le cas $p = 0$, le raisonnement précédent montre que si Dx_k est pair, x_k est de hauteur infinie: En effet, si $x_k^{s-1} \neq 0$, $f(x_k^s)$ contient un terme $C_i^r(x_k^i \otimes x_k^{r-i})$, $(0 < i < s)$, non nul qui ne pourra se retrouver dans $f(x_k^s) - C_i^r(x_k^i \otimes x_k^{r-i})$ donc $f(x_k^s) \neq 0$ et $x_k^s \neq 0$, d'où pour $p = 0$, le fait que tout système minimal est de type (M) et le complément.

6.5. Nous supposons dorénavant $p \neq 0$, $P = x_k^r + R(x_k, \cdots, x_1)$, r puissance de p. A montrer: *Si $P = 0$, tout monôme normal de R est puissance r-ième d'un monôme en $x_1, \cdots, x_{k-1}$*, (éventuellement multiplié par une constante en K_p.

Admettons cela pour un instant. Le corps de base étant parfait, chacun de ses éléments est puissance r-ième, donc R est une somme de puissances r-ièmes et est finalement lui-même puissance r-ième d'un polynôme en $x_1, \cdots, x_{k-1}$.; ainsi il existe un polynôme $R_1(x_{k-1}, \cdots, x_1)$ tel que $P = (x_k + R_1)^r$; mais alors $P = 0$ signifie que x_k a une hauteur strictement plus grande que $x_k + R_1(x_{k-1}, \cdots, x_1)$, ce qui contredit la condition M 2 de la définition 6.1, et termine la démonstration du théorème.

Soit $p = 2$ ou sinon Dx_j pair; alors si s n'est pas une puissance de p et si $x_j^{s-1} \neq 0$, $f(x_j^s)$ contiendra un terme $C_i^s(x_j^i \otimes x_j^{s-i})$, $(0 < i < s)$, non nul qui ne peut être annulé par un monôme de $f(x_j^s) - C_i^s(x_j^i \otimes x_j^{s-i})$, donc $x_j^s \neq 0$: la hauteur de x_j est infinie ou une puissance de p, ce qui prouve le complément.

Il nous reste donc à établir l'assertion (6.5); nous procéderons par récurrence sur l'ordre lexicographique décroissant des monômes normaux; supposons avoir démontré:

$$(6.5) \quad P = (x_k + S(x_{k-1}, \cdots, x_1))^r + x_j^t Q(x_{j-1} \cdots, x_1) + T(x_j, \cdots, x_1)$$

avec $j \leqq k$, x_j ne figurant (éventuellement) dans T qu'avec des exposants $<t \cdot$ N. B. On n'exclut pas le cas $S = 0$, c'est à dire où l'on considère le premier

monôme normal suivant x_k^r, c'est du reste le seul où l'on peut avoir a priori $j = k$. On a:

$$f(x_k + S) = (x_k + S) \otimes 1 + 1 \otimes (x_k + S) + k_1 a_1 \otimes b_1 + \cdots + k_m a_m \otimes b_m$$

($k_i \in K_p$; a_i, b_i monômes normaux en $x_{k-1}, \cdots, x_1$), donc

$$f((x_k + S)^r = (x_k + S)^r \otimes 1 + 1 \otimes (x_k + S)^r \pm k_1^r a_1^r \otimes b_1^r \pm \cdots \pm k_m^r a_m^r \otimes b_m^r.$$

Admettons tout d'abord que dans la formule (6.5), Q soit de degré strictement positif et soit a son premier monôme normal; alors le raisonnement de 6.3 montre que $f(x_j^t Q + T)$ contient $x_j^t \otimes a$ exactement une fois, précédé du coefficient de a dans Q; pour que $f(P) = 0$ il faut donc que ce monôme normal se retrouve identiquement dans $f((x_k + S)^r)$, donc qu'il existe i tel que $a_i^r = x_j^t$, $b_i^r = a$; le monôme $x_j^t a$ est donc puissance r-ième de $a_i b_i$ multiplié éventuellement par une racine r-ième de (-1).

Soit maintenant $Q = c$ une constante; on a donc $j < k$, et naturellement $r \leqq t$, vu $tDx_j = rDx_k$ et $Dx_j \leqq Dx_k$. Ainsi, si t est lui-même puissance de p, il est divisé par r et x_j est puissance r-ième (d'une puissance de x_j); sinon, $f(cx_j^t)$ contient un terme $cC_q^t(x_j^q \otimes x_j^{t-q})$, $(0 < q < t)$, non nul, qui devra se retrouver dans $f((x_k + S)^r)$; il y a donc un indice i tel que $x_j^q = a_i^r$, $x_j^{t-q} = b_j^r$, x_j^t est de nouveau puissance r-ième (en fait aussi d'une puissance de x_j, car on tire de 6.3 que a_i et b_i sont des puissances de x_j), ce qui termine la démonstration.

6.6. Pour la définition suivante, H a les propriétés énumérées dans les trois premières lignes de 6.1.

Definition 6.4. *L'ensemble d'éléments homogènes de degrés positifs* (x_i), $(i = 1, 2, \cdots)$, *de* H *est un système simple de générateurs si les monômes* $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} (i_1 < i_2 < \cdots < i_k ; k = 1, 2, \cdots)$ *forment avec l'élément neutre une base d'espace vectoriel sur* K_p *de* H.

Proposition 6.1. (a) *Une algèbre de Hopf de type fini sur un corps parfait de caractéristique deux admet toujours un système simple de générateurs.*

(b) *Soit* H *une algèbre de Hopf de dimension finie sur un corps parfait de caractéristique* $p \neq 2$. *Elle admet un système simple de générateurs si et seulement si elle est une algèbre extérieure engendrée par des éléments de degrés impairs. Cela se produit toujours quand* $p = 0$.

(a) Si (x_i) est un système de générateurs p-semi-libre on obtient un système simple en ajoutant aux x_i leurs puissances d'exposants $2, 4, \cdots, 2^s, \cdots$ tant qu'elles ne sont pas nulles.

(b) Pour $p = 0$ un système minimal de générateurs ne peut contenir un élément de degré pair, puisque la hauteur de ce dernier serait infinie, H est donc une algèbre extérieure (compte tenu du théorème 6.1); pour $p \neq 0, 2$ il nous suffit de montrer que si H a un système simple de générateurs, tout élément d'un système de générateurs p-semi-libre est de degré impair; or soit n la dimension de H, si H a un système simple de générateurs, n est une puissance de deux, si d'autre part $(x_1, \cdots, x_m)$ est un système de générateurs p-semi-libre et si

s_i est la hauteur de x_i, $n = s_1 \cdots s_m$, n est donc divisible par p si l'un des x_j est de degré pair (complément au Théoreme 6.1), d'où notre assertion.

§7. Conséquences topologiques

On appelle variété de Hopf une variété X pour laquelle il existe une application continue ζ: $X \times X \to X$ telle que les transformations $x \to \zeta(a \times x)$ et $x \to \zeta(x \times b)$ de X dans elle-même induisent des automorphismes de $H(X, Z)$; on dira que ζ est un *produit essentiel* sur X.

Proposition 7.1. *Soit X une variété de Hopf compacte connexe et K_p un corps quelconque de caractéristique p.*

Alors $H(X, K_p)$ admet un système de générateurs p-semi-libre.

Si L_p est le corps premier de K_p, on a

$$H(X, K_p) = H(X, L_p) \otimes K_p \qquad \text{(produit tensoriel sur } L_p\text{)} \tag{7.1}$$

il suffit donc de prouver la proposition pour les coefficients L_p. Or ici

$$H(X \times X, L_p) = H(X, L_p) \otimes H(X, L_p) \tag{7.2}$$

et l'homomorphisme ζ^*: $H(X, L_p) \to H(X \times X, L_p)$ transposé de ζ fait de $H(X, L_p)$ une algèbre de Hopf, comme on sait; on peut appliquer le théorème 6.1 puisque L_p est parfait et $H(X, L_p)$ évidemment de type fini.

Remarques. La Proposition 7.1 vaut naturellement pour des espaces plus généraux munis d'un produit essentiel; en cohomologie d'Alexander-Spanier il s'applique à tout espace X compact connexe, en effet, dans ce cas (7.2) est toujours vrai (voir par ex. [23], No. 63) et le théorème 6.1 est valable, tout au moins si $H(X, L_p)$ est de type fini, mais cette hypothèse n'est pas indispensable dans cette démonstration. En cohomologie singulière la proposition 7.2 s'applique à tout espace X connexe dont la cohomologie singulière est de type fini, car (7.2) est alors vrai d'après un résultat (non publié) de Eilenberg-Zilber, mais cette hypothèse de finitude qui intervient déjà à propos de (7.2) ne peut probablement être supprimée en général.

Proposition 7.2. *Si X est une variété de Hopf compacte connexe sans p-torsion $H(X, K_p)$ est l'algèbre extérieure d'un espace vectoriel gradué par des degrés impairs.*

Pour $p = 0$, notre hypothèse est toujours vérifiée et la proposition résulte de la proposition 6.1.

Si X est sans p-torsion on a:

$$H(X, K_p) = H(X, Z) \otimes K_p \quad \text{(produit tensoriel sur Z)} \tag{7.3}$$

et tout élément de degré impair de $H(X. K_p)$ est de carré nul (pour $p \neq 2$, c'est évident, pour $p = 2$, c'est vrai dans $H(X, Z)$, puisque le carré d'une classe entière est d'ordre deux, donc dans $H(X, Z) \otimes K_p$). Il suffira donc de montrer que les éléments d'un système de générateurs $(x_{p,i})$ p-semi-libre sont de degrés impairs.

Soit G_p^j le sous-espace des éléments décomposables de $H^j(X, K_p)$, c'est à dire le sous-espace engendré par les produits d'éléments de degrés strictement plus petits que j; le nombre de générateurs de $(x_{p,i})$ de degré j est évidemment égal à dim. $H^j(X, K_p)$ − dim. G_p^j ; d'autre part, si X est sans p-torsion on a dim. $H^j(X, K_0)$ = dim. $H^j(X, K_p)$; il suffit donc, puisque le théorème est vrai pour $p = 0$, de montrer que dim. G_0^j = dim. G_p^j . C'est évident pour $j = 1$, supposons le vrai pour $j < k$; il y a alors correspondance biunivoque conservant le degré entre les éléments de $(x_{0,i})$ et de $(x_{p,i})$ ayant des degrés $<k$ (donc forcément impairs) et aussi entre les monômes $x_{0,i_1} \cdots x_{0,i_s}$ et

$$x_{p,i_1} \cdots x_{p,i_s} \; (i_1 < i_2 < \cdots < i_s)$$

produits d'éléments de degrés $<k$; ceux qui sont de degré k forment alors une base de G_0^k , resp. G_p^k ; ces deux espaces ont même dimension.

Remarques. (1) Il résulte évidemment de cette démonstration que si X est sans p-torsion, tout système minimal de générateurs de $H(X, K_p)$ est p-semi-libre.

(2) Signalons en passant qu'il y a au moins une réciproque partielle à la Prop. 7.2: *Si $H(X, K_p)$ est une algèbre extérieure engendrée par des éléments de degrés impairs et si $H^2(X, Z)$ est sans p-torsion, alors X est sans p-torsion*; *la* dernière condition est en particulier vérifiée si le groupe fondamental de X n'a pas de p-torsion. Nous omettons la démonstration de ce résultat dont nous n'aurons pas besoin.

Proposition 7.3. *Si X est une variété de Hopf compacte connexe sans torsion, $H(X, Z)$ est l'algèbre extérieure d'un groupe abélien libre ayant une base formée d'éléments de degrés impairs.*

Soit G^j le sous-groupe des éléments décomposables de $H^j(X, Z)$; ce dernier étant supposé libre, on peut y trouver une base $u_{j,1}, \cdots, u_{j,r_j}, v_{j,1}, \cdots, v_{j,s_j}$ telle que $m_{j,i}u_{j,i}$ soit une base de G^j ($m_{j,i}$ entier non nul).

Soit Z_p le corps des entiers mod p, Z_0 celui des rationnels $H(X, Z)$ est contenu dans $H(X, Z_0)$, et il est clair que G^j engendre G_0^j , (donc r_j = dim. G_0^j), et que les $v_{j,i}$ forment un sustème minimal de générateurs de $H(X, Z_0)$; les $v_{j,i}$ sont donc de degrés impairs, de carrés nuls et ont un produit non nul; il nous suffira de montrer qu'ils forment un système de générateurs de $H(X, Z)$, et pour cela que G^j est facteur direct dans $H^j(X, Z)$, c'est à dire que

$$m_{j,i} = \pm 1 \; (j = 1, 2, \cdots ; i = 1, 2, \cdots , r_j).$$

On a déjà r_j = dim. G_0^j = dim. G_p^j , vu la démonstration de la Prop. 7.2; d'autre part, si $p > 1$, $H(X, Z_p) = H(X, Z) \otimes Z_p$ s'identifie au quotient de $H(X, Z)$ par le sous-groupe des éléments $p \cdot h(h \in H(X, Z))$ et il est immédiat que G_p^j s'identifie alors au quotient de G^j; il ne peut être de dimension r_j que si aucun des m_{ji} n'est divisible par p; cela valant pour tout premier $p > 1$, on a bien $m_{ji} = \pm 1$.

Chapitre III. Cohomologie des Varietes de Stiefel (Theorie Elementaire)

§8. Remarques sur l'algébre spectrale des espaces fibrés

Dans ce paragraphe nous considérons un espace fibré (E, B, F, p) pour lequel nous supposons que E, B, F sont des polyèdres finis et que les algèbres $H(F_b, Z)$ forment un système simple sur B; ces hypothèses ne seront pas répétées.

8.1. Si $h \in H(E, A)$ est de filtration p, c'est à dire si $h \in J^p$, $h \notin J^{p+1}$, on note $\bar{h}$ son image dans $J^p/J^{p+1} \subset G(H(E, A)) = H_\infty$.

Proposition 8.1. (a) *Si* $(\bar{h}_i)$, $(i = 1, \cdots, m)$, *est un système de générateurs d'algèbre* (*resp. de module*) *de* $G(H(E, A))$, (h_i) *est un système de générateurs d'algèbre* (*resp. de module*) *de* $H(E, A)$.

(b) *Si* $(\bar{h}_i)$ *est un système simple de générateurs de* $G(H(E, A))$, (h_i) *est un système simple de générateurs de* $H(E, A)$.

(c) *Si* $G(H(E,A))$ *est une algèbre extérieure engendrée par des éléments* $\bar{h}_1, \cdots, \bar{h}_m$ *de degrés totaux impairs,* $H(E, A)$ *est une algèbre extérieure engendrée par* $h_1, \cdots, h_m$ *quand* $A = K_p$, $(p \neq 2)$, *ou encore quand* $A = Z$ *et* $G(H(E, Z))$ *est sans torsion.*

(a) Soit P la sous-algèbre engendrée par l'élément neutre et $h_1, \cdots, h_m$; par hypothèse, tout élément de $J^{p,n-p}$ est égal, modulo $J^{p+1,n-p-1}$, à un élément de P; comme $J^{n+1,-1} = 0$, on en déduit par récurrence descendante sur p que $J^{p,n-p} \subset P$, donc $H^n(E, A) = J^{0,n} \subset P$ et $H(E, A) \subset P$.

Démonstration analogue pour le cas du système de générateurs de module.

(b) Désignons par $q_1, \cdots, q_s$ les monômes $h_{i_1}h_{i_2} \cdots h_{i_k}(i_1 < i_2 < \cdots < i_k$; $k = 1, \cdots, m)$; la démonstration de a) montre que tout $h \in H(E, A)$ est combinaison linéaire de 1 et des q_i; il reste à établir l'indépendance linéaire de $q_1, \cdots, q_s$; soit $h = a_1q_{j_1} + \cdots + a_tq_{j_t}$ une combinaison linéaire de certains d'entre eux à coefficients non nuls ($j_i \neq j_k$ si $i \neq k$); on peut supposer que $q_{j_1}, \cdots, q_{j_k}$ sont de filtration p et que $q_{j_{k+1}}, \cdots, q_{j_t}$ sont de filtrations $>p$; alors $h \in J^p$ et son image dans J^p/J^{p+1} est $\bar{h} = a_1\bar{q}_{j_1} + \cdots + a_k\bar{q}_{j_k}$, elle est différente de zéro, puisque $\bar{h}_1, \cdots, \bar{h}_m$ est un système simple de générateurs de $G(H(E, A))$, donc $h \neq 0$.

(c) (h_i) est un système simple de générateurs de $H(E, A)$ d'après (b); il suffit de voir que $h_ih_i = 0$. Pour $A = K_p$, $p \neq 2$, c'est évident; si $G(H(E, Z))$ est sans torsion, il en est de même de $H(E, Z)$, et h_ih_i qui ne peut qu'être d'ordre deux s'il est $\neq 0$ est bien nul.

Remarque. Le fait que $H(E, A)$ est une algèbre de cohomologie n'a pas joué de rôle; nous avons simplement explicité quelques relations entre une algèbre filtrée et l'algèbre graduée associée lorsque la filtration vérifie certaines conditions de finitude.

8.2. Pour déterminer $H_2 = H(B, H(F, Z))$ on peut appliquer la règle de Künneth ce qui donne ici:

$$H_2 = H(B, Z) \otimes H(F, Z) + \text{Tor}\,(H(B, Z), H(F, Z)) = H(B \times F, Z)$$

au point de vue additif bien entendu; le groupe Tor $(H(B, Z), H(F, Z))$ est le quotient de H_2 par $H(B, Z) \otimes H(F, Z)$, il est complètement déterminé par les sous-groupes de torsion de $H(B, Z)$ et $H(F, Z)$ et en dépend bilinéairement ([23], Théorème 63.1); ici, pour le calculer explicitement en fonction de ces derniers, il suffit de savoir que Tor $(Z_p, Z_q) = Z_{(p,q)}$, où (p, q) est le plus grand commun diviseur de p et q ([23], Prop. 18.1e).

8.3. Nous avons déjà relevé au §1 que les propriétés de torsion d'une algèbre filtrée et de son algèbre graduée associée peuvent être fort différentes; nous donnerons ici un cas très particulier où $H(E, Z)$ et $G(H(E, Z)$ sont additivement isomorphes. Nous dirons que l'algèbre spectrale de (E, B, F, p) calculée pour les coefficients A est l'algèbre spectrale sur A de (E, B, F, p).

PROPOSITION 8.2. *On suppose que $H(B, Z)$ et $H(F, Z)$ ne contiennent que des éléments d'ordre infini ou deux, et que les algèbres spectrales de (E, B, F, p) sur R et sur Z_2 sont triviales.*

Alors l'algèbre spectrale de (E, B, F, p) sur Z est triviale, $H(E, Z)$ est additivement isomorphe à $H_2 = G(H(E, Z))$. $H_r (r \geqq 2)$, resp. H_∞, $H(E, Z)$, est somme directe de m_r, resp. m_∞, m groupes Z et de n_r, resp. n_∞, n groupes cycliques d'ordres égaux à des puissances de nombres premiers, m_2 et n_2 sont finis, il en est donc de même de m_r, n_r, m_∞, n_∞. En tenant compte des remarques du §1B, on voit que $m_\infty = m$, $n_\infty \geqq n$; d'autre part m et m_2 sont les dimensions de $H(E, R)$ et de H_2 calculé pour $A = R$ donc vu les hypothèses $m_2 = m$, d'où $m_2 = m_3 = \cdots = m_\infty = m$ car évidemment $m_{r+1} \leqq m_r$; l'égalité $m_r = m_{r+1}$ signifie qu'un cocycle de H_r d'ordre infini n'est pas un cobord, donc que $d_r(H_r) \subset$ Tors. H_r, d'où Tors. $H_{r+1} = \kappa_{r+1}^r$ Tors. H_r, Tors. H_{r+1} est un quotient de Tors. H_r.

Ici, vu nos hypothèses et le No. 8.2, Tors. H_2 est somme de n_2 groupes Z_2; Tors. H_r et Tors. H_∞ sont donc aussi sommes de groupes Z_2 et de plus $n \leqq n_\infty \leqq \cdots \leqq n_{r+1} \leqq n_r \leqq \cdots \leqq n_2$; Tors. $H(E, Z)$ est donc somme directe de groupes Z_{u_i} où u_i est une puissance de 2 (cf. §1B), $(i = 1, \cdots, n)$. D'après la formule des coefficients universels, on a

$$H(E, Z_2) = H(E, Z) \otimes Z_2 + \operatorname{Tor} (H(E, Z), Z_2)$$

la dimension de $H(E, Z_2)$ est donc $m + 2n$. Comme sur Z_2 on a $H_2 = H(B, Z_2) \otimes H(F, Z_2) = H(B \times F, Z_2)$, la dimension de H_2 est de même $m_2 + 2n_2$; ces deux dimensions sont égales puisque l'algèbre spectrale de (E, B, F, p) sur Z_2 est triviale (et que $\dim H(E, K_p) = \dim G(H(E, K_p))$ d'où $n = n_\infty = n_{r+1} = n_r = n_2$; l'égalité $n_{r+1} = r_r$ ne peut être ici vraie que si Tors. $H_{r+1} =$ Tor. H_r donc si $d_r = 0$, l'algèbre spectrale sur Z est donc triviale.

Soit enfin $u_i = 2^{s_i}$; il correspond à $Z_{u_i} \subset H(E, Z)$ dans $G(H(E, Z))$ une somme de s_i groupes cycliques d'ordre 2 (vu le §1B et le fait que Tors. H_∞ n'a que des éléments d'ordre 2); pour que $n_\infty = n$, il faut donc que $s_i = 1 (i = 1, \cdots, n)$, d'où l'isomorphie additive de $H(E, Z)$ et $G(H(E, Z)) = H_2 = H(B \times F, Z)$.

§9. Variétés de Stiefel complexes et quaternioniennes

NOTATIONS. $\mathbf{W}_{n,q}$: variété des systèmes ordonnés de q vecteurs orthonormaux de l'espace C^n de n variables complexes.

$\mathbf{X}_{n,q}$: variété des systèmes ordonnés de q vecteurs orthonormaux de l'espace K^n de n variables quaternioniennes.

$\mathbf{U}(n)$, resp. $\mathbf{SU}(n)$, groupe unitaire de C^n, resp. K^n.

$\mathbf{SU}(n)$, groupe unitaire unimodulaire de C^n.

On sait que l'on a des inclusions canoniques $\mathbf{U}(n) \supset \mathbf{U}(n-1) \supset \cdots \supset \mathbf{U}(1)$ et que

$$(9.1) \qquad \mathbf{U}(n)/\mathbf{U}(n-q) = \mathbf{W}_{n,q}; \qquad \mathbf{W}_{n,1} = \mathbf{S}_{2n-1}; \qquad \mathbf{W}_{n,n} = \mathbf{U}(n)$$

$(\mathbf{U}(n), \mathbf{W}_{n,q}, \mathbf{U}(n-q), p_q)$ est un espace fibré principal de groupe $\mathbf{U}(n-q)$, son quotient par $\mathbf{U}(n-q-r)$ est un espace fibré $(\mathbf{W}_{n,q+r}, \mathbf{W}_{n,q}, \mathbf{W}_{n-q,r}, p_{q,q+r})$; il est clair que:

$$(9.2) \qquad p_{q,q+r} = p_{q,q+1} \circ p_{q+1,q+2} \circ \cdots \circ p_{q+r-1,q+r}\,; \qquad p_{q,n} = p_q\,.$$

On construit des fibrations analogues à partir des groupes $\mathbf{SU}(n)$ et $\mathbf{Sp}(n)$; en particulier

$$(9.3) \quad \mathbf{W}_{n,q} = \mathbf{SU}(n)/\mathbf{SU}(n-q); \qquad \mathbf{W}_{n,n-1} = \mathbf{SU}(n)$$

$$(9.4) \quad \mathbf{X}_{n,q} = \mathbf{Sp}(n)/\mathbf{Sp}(n-q); \qquad \mathbf{X}_{n,1} = \mathbf{S}_{4n-1}\,; \qquad \mathbf{X}_{n,n} = \mathbf{Sp}(n).$$

PROPOSITION 9.1.[10] *$\mathbf{W}_{n,n-q}$ et $\mathbf{X}_{n,n-q}$ sont sans torsion et*

$$H(\mathbf{W}_{n,n-q}, Z) = H(\mathbf{S}_{2n-1} \times \mathbf{S}_{2n-3} \times \cdots \times \mathbf{S}_{2q+1}, Z)$$

$$H(\mathbf{X}_{n,n-q}, Z) = H(\mathbf{S}_{4n-1} \times \mathbf{S}_{4n-5} \times \cdots \times \mathbf{S}_{4q+3}, Z) \quad (0 \leqq q \leqq n-1).$$

La proposition est vraie pour $\mathbf{W}_{n,1} = \mathbf{S}_{2n-1}$; supposons-la établie pour $\mathbf{W}_{n,n-q-1}$ et considérons l'algèbre spectrale sur Z de

$$(\mathbf{W}_{n,n-q}, \mathbf{W}_{n,n-q-1}, \mathbf{W}_{q+1,1}, p_{n-q-1,n-q});$$

on a des coefficients ordinaires dans H_2 d'après le §4ii), ou aussi, si l'on veut, parce que la base est simplement connexe, donc

$$H_2 = H(\mathbf{W}_{n,n-q-1}, Z) \otimes H(\mathbf{S}_{2q+1}, Z)$$

les degrés fibres sont 0 et $2q+1$, donc seule d_{2q+2} peut ne pas être nulle; cependant elle est nulle sur les éléments de DF nul qui forment $H(\mathbf{W}_{n,n-q-1}, Z) \otimes H^0(\mathbf{S}_{2q+1}, Z)$, et également sur $H_{2q+2}^{0,2q+1} \cong H^{2q+1}(\mathbf{S}_{2q+1}, Z)$ car $H_{2q+2} = H_2$ n'a pas d'élément de degré total $2q+2$, d'après l'hypothèse de récurrence; d_{2q+2} étant une différentielle est alors nulle sur $H_{2q+2}^{r,s} = H_{2q+2}^{r,0} \otimes H_{2q+2}^{0,s}$, donc sur H_{2q+2}, l'algèbre spectrale est triviale; on applique alors la Prop. 8.1c.

Démonstration analogue pour $\mathbf{X}_{n,n-q}$.

REMARQUES. (1) Dans la Proposition 9.1 il s'agit bien entendu d'un isomorphisme d'algèbres, c'est à dire respectant la structure additive et le cup-produit, mais cet isomorphisme n'est en général pas valable pour les p-puissances réduites de Steenrod (*voir* [6]).

(2) On déduit immédiatement de la Prop. 9.1 que l'algèbre spectrale sur Z de $(\mathbf{W}_{n,r+s}, \mathbf{W}_{n,r}, \mathbf{W}_{n-r,s}, p_{r,r+s})$ est triviale, donc que $\mathbf{W}_{n-r,s}$ est totalement non homologue à zéro dans $\mathbf{W}_{n,r+s}$ et que $p_{r,r+s}^*$ est biunivoque. Soient $\bar{h}_1, \cdots, \bar{h}_k$ resp. $\bar{h}_{k+1}, \cdots, \bar{h}_t$ des générateurs de $H(\mathbf{W}_{n,r}, Z) \otimes 1$ et de $1 \otimes H(\mathbf{W}_{n-r,s}, Z)$; alors les éléments h_i (h_i représentant de $\bar{h}_i$ dans $H(\mathbf{W}_{n,r+s}, Z)$) sont de carré nul et $H(\mathbf{W}_{n,r+s}, Z)$ est l'algèbre extérieure engendrée par eux; elle s'identifie donc au produit tensoriel de l'algèbre extérieure de $h_1, \cdots, h_k$, qui est l'image de $p_{r,r+s}^*$, par l'algèbre extérieure de $h_{k+1}, \cdots, h_t$ qui est appliquée isomorphiquement sur $H(\mathbf{W}_{n-r,s}, Z)$ par i^* (cf. §4c).

[10] Cette proposition est due à C. Ehresmann [17].

Il en résulte en particulier ceci: Si x_i est un générateur de $H^{2i+1}(\mathbf{W}_{n,n-i}, Z)$, alors $p^*_{n-1}(x_1), p^*_{n-2}(x_2), \cdots, p^*_i(x_{n-1})$ forment avec un générateur de $H^1(U(n), Z)$ un système de générateurs de $H(\mathbf{U}(n), Z)$.

§10. Variétés de Stiefel réelles

NOTATIONS. $\mathbf{V}_{n,q}$: variété des systèmes ordonnés de q vecteurs orthonormaux de R^n.

$\mathbf{O}(n)$, resp. $\mathbf{SO}(n)$, groupe orthogonal, resp. groupe orthogonal unimodulaire, de R^n.

$\mathbf{G}_{n,m}$, (resp. $\mathbf{G}^0_{n,m}$), grassmannienne des m plans, (resp. des m plans orientés), de R^n, passant par l'origine.

On a des inclusions canoniques $\mathbf{O}(n) \supset \mathbf{O}(q)$, $\mathbf{SO}(n) \supset \mathbf{SO}(q)$ qui conduisent aux fibrations

$$\mathbf{V}_{n,q} = \mathbf{SO}(n)/\mathbf{SO}(n-q) = \mathbf{O}(n)/\mathbf{O}(n-q) \qquad (1 \leqq q \leqq n). \tag{10.1}$$

On a

$$\mathbf{V}_{n,1} = \mathbf{S}_{n-1}; \qquad \mathbf{V}_{n,n-1} = \mathbf{V}_{n,n} = \mathbf{SO}(n) \tag{10.2}$$

et comme dans le cas unitaire, des fibrations $(\mathbf{V}_{n,q+r}, \mathbf{V}_{n,q}, \mathbf{V}_{n-q,r}, p_{q,q+r})$. Des inclusions $\mathbf{O}(n) \supset \mathbf{O}(q) \times \mathbf{O}(n-q)$ et $\mathbf{SO}(n) \supset \mathbf{SO}(q) \times \mathbf{SO}(n-q)$ on déduit les espaces fibrés principaux

$$(\mathbf{V}_{n,q}, \mathbf{G}_{n,q}, \mathbf{O}(q), p); \qquad (\mathbf{V}_{n,q}, \mathbf{G}^0_{n,q}, \mathbf{SO}(q), p) \tag{10.3}$$

et que $\mathbf{G}^0_{n,m}$ est un recouvrement à deux feuillets de $\mathbf{G}_{n,m}$ (pour ces fibrations, voir par ex. [31] No. 7).

Nous admettrons la Proposition suivante, due à E. Stiefel ([32], Satz V):

PROPOSITION 10.1. *Si n est pair*, $H(\mathbf{V}_{n,2}, Z) = H(\mathbf{S}_{n-1} \times \mathbf{S}_{n-2}, Z)$. *Si n est impair, les groupes de cohomologie entière de* $\mathbf{V}_{n,2}$ *sont*

$$H^0 = H^{2n-3} = Z, H^{n-1} = Z_2; \qquad H^i = 0 \qquad (i \neq 0, n-1, 2n-3).$$

Par conséquent si n est impair:

$$H(\mathbf{V}_{n,2}, K_2) = H(\mathbf{S}_{n-1} \times \mathbf{S}_{n-2}, K_2) \tag{10.4}$$

$$H(\mathbf{V}_{n,2}, K_p) = H(\mathbf{S}_{2n-3}, K_p) \qquad (p \neq 2). \tag{10.5}$$

PROPOSITION 10.2. *Soit* $\bar{n}$, (*resp.* $\bar{q}$), *le plus grand*, (*resp. le plus petit*), *entier impair* $\leqq n$, (*resp.* $\geqq q$).

Alors $\mathbf{V}_{n,n-q}$ *a pour les coefficients* K_p ($p \neq 2$) *même algèbre de cohomologie que le produit*:

$$\mathbf{S}_{2\bar{n}-3} \times \mathbf{S}_{2\bar{n}-7} \times \cdots \times \mathbf{S}_{2\bar{q}+1}{}^{11}$$

multiplié encore par $\mathbf{S}_{n-1}$ *si n est pair, par* S_q *si q est pair.*

Nous supposons tout d'abord q impair; la proposition est vraie pour $\mathbf{V}_{2m,1} =$

[11] remplacé par un point si $\bar{n} = \bar{q}$.

$\mathbf{S}_{2m-1}$ et pour $\mathbf{V}_{2m+1,2}$ (Prop. 10.1); on passera de $\mathbf{V}_{n,n-q-2}$ à $\mathbf{V}_{n,n-q}$ en montrant que l'algèbre spectrale sur K_p de la fibration $(\mathbf{V}_{n,n-q}, \mathbf{V}_{n,n-q-2}, \mathbf{V}_{q+2,2}, p_{n-q-2,n-q})$ est triviale, à l'aide d'un raisonnement s'appuyant sur (10.5) et à peu près identique à la démonstration de la Prop. 9.1, que nous n'expliciterons pas.

Si q est pair, on considère la fibration $(\mathbf{V}_{n,n-q}, \mathbf{V}_{n,n-q-1}, \mathbf{S}_q, p_{n-q-1,n-q})$; la proposition est vraie pour $\mathbf{V}_{n,n-q-1}$ et d'autre part $\mathbf{S}_q$ est totalement non homologue à zéro relativement à K_p, puisque q est pair et $p \neq 2$ (voir par ex. [24], Théorème 12.1); l'algèbre spectrale est donc triviale (Prop. 4.1) d'où, au point de vue additif pour l'instant, l'isomorphie annoncée; mais si $h \in H(\mathbf{V}_{n,n-q}, K_p)$ est tel que $i^*(h)$ soit un cocycle fondamental de $\mathbf{S}_q$, alors $\mathrm{h}\cdot\mathrm{h} = 0$ car $H^{2q}(\mathbf{V}_{n,q}, K_p) = 0$; il en résulte que $H(\mathbf{V}_{n,n-q}, K_p)$ est le produit tensoriel de l'algèbre engendrée par 1 et h et de l'algèbre $p^*_{n-q-1,n-q}(H(\mathbf{V}_{n,n-q-1}, K_p)) \cong H(\mathbf{V}_{n,n-q-1}, K_p)$, ce qui établit la proposition au point de vue multiplicatif.

PROPOSITION 10.3. *$H(\mathbf{V}_{n,n-q}, K_2)$ admet un système simple de générateurs $h_q, h_{q+1}, \cdots, h_{n-1}$ de degrés respectifs $q, q+1, \cdots, n-1$.*[12]

Pour $\mathbf{V}_{n,2}$, n quelconque, cf. (10.4), supposons la proposition vraie pour $\mathbf{V}_{n,r}$ $(2 \leqq r \leqq p-1, n$ quelconque). Pour passer à $\mathbf{V}_{n,p}$ nous examinons tout d'abord l'algèbre spectrale de la fibration $(\mathbf{V}_{n,p}, \mathbf{V}_{n,1}, \mathbf{V}_{n-1,p-1}, p_{1,p})$; comme $\mathbf{V}_{n,1} = \mathbf{S}_{n-1}$, les seuls degrés base sont 0 et $n-1$ et d_{n-1} est la seule différentielle pouvant ne pas être nulle; cependant, comme $p \geqq 3$, elle est certainement nulle sur $H^{0,n-p}_{n-1} = H^{0,n-p}_2 \cong H^{n-p}(\mathbf{V}_{n-1,p-1}, K_2)$ qui est différent de zéro par suite de l'hypothèse d'induction, donc $H^{0,n-p}_\infty \neq 0$ et $H^{n-p}(\mathbf{V}_{n,p}, K_2) \neq 0$. Considérons maintenant l'algèbre spectrale de la fibration $(\mathbf{V}_{n,p}, \mathbf{V}_{n,p-1}, \mathbf{V}_{n-p+1,1}, p_{p-1,p})$; comme $\mathbf{V}_{n-p+1,1} = \mathbf{S}_{n-p}$ les seuls degrés-fibre sont 0 et $n-p$ et seule d_{n-p+1} peut ne pas être nulle. Dans H_{n-p+1}, les seuls éléments de degré total $n-p$ sont $H^{0,n-p}_{n-p+1} = 1 \otimes H^{n-p}(\mathbf{S}_{n-p}, K_2)$ et forment un espace de dimension 1; on sait déjà que $H^{n-p}(\mathbf{V}_{n,p}, K_2) \neq 0$, il faut donc que H_∞ contienne des éléments de degré total $n-p$; la seule possibilité est ici $H^{0,n-p}_\infty \neq 0$, ce qui entraîne $d_{n-p+1}(H^{0,n-p}_{n-p+1}) = 0$, et même $d_{n-p+1} = 0$ puisque H_{n-p+1} est le produit tensoriel de la sous-algèbre formée des éléments de degré fibre 0 par la sous-algèbre engendrée pas 1 et $H^{0,n-p}_{n-p+1}$; ainsi l'algèbre spectrale est triviale, il suffit alors d'appliquer la Prop. 8.1b et l'hypothèse d'induction.

REMARQUES. (1) On tire immédiatement de la Prop. 10.3 que l'algèbre spectrale sur K_2 de $(\mathbf{V}_{n,q+r}, \mathbf{V}_{n,q}, \mathbf{V}_{n-q,r}, p_{q,q+r})$ est triviale et, en utilisant la Prop. 8.1 et le §4b, que l'on peut trouver un système simple de générateurs de $H(\mathbf{V}_{n,q+r}, K_2)$ dont les derniers éléments forment un système simple de générateurs de $p^*_{q,q+r}(H(\mathbf{V}_{n,q}, K_2)) = H(\mathbf{V}_{n,q}, K_2)$.

Comme dans le cas unitaire, il en résulte ceci: Soit x_i un générateur de $H^i(\mathbf{V}_{n,n-i}, K_2)$ et p_{n-i} la projection de $\mathbf{SO}(n)$ sur $\mathbf{V}_{n,n-i}$; alors $p^*_{n-2}(x_2), \cdots, p^*_1(x_{n-1})$ forment avec un générateur de $H^1(\mathbf{SO}(n), K_2)$ un système simple de générateurs de $H(\mathbf{SO}(n), K_2)$.

(2) L'isomorphisme additif de $H(\mathbf{V}_{n,q+r}, K_2)$ et de $H(\mathbf{V}_{n,q}, K_2) \otimes H(\mathbf{V}_{n-q,r}, K_2)$

---

[12] Le polynôme de Poincaré mod 2 de $\mathbf{V}_{n,p}$ a été indiqué par C. Ehresmann [17]; pour ces variétés voir aussi [16].

ne s'étend pas en général au cup-produit comme le montrent les cup-produits indiqués dans [2]. Signalons que pour les Sq^i on trouve (pour un certain choix du système simple de générateurs):

$$(10.6) \qquad Sq^i h_j = \binom{j}{i} h_{i+j} \ (i + j \leqq n - 1), \qquad Sq^i h_j = 0 \qquad (i + j \geqq n).$$

Proposition 10.4. *Les éléments non nuls de* Tors. $H(\mathbf{V}_{n,n-q}, Z)$ *sont d'ordre deux. Si* $\bar{n}$ (*resp.* $\bar{q}$), *est le plus grand,* (*resp. le plus petit*), *nombre impair* $\leqq n$ (*resp.* $\geqq q$), $\mathbf{V}_{n,n-q}$ *a au point de vue additif, même cohomologie entière que le produit*

$$\mathbf{V}_{\bar{n},2} \times \mathbf{V}_{\bar{n}-2,2} \times \cdots \times \mathbf{V}_{\bar{q}+2,2}{}^{11}$$

multiplié encore par $\mathbf{S}_{n-1}$ *si* n *est pair, par* $\mathbf{S}_q$ *si* q *est pair.*

Si q est impair, les algèbres spectrales sur R et sur K_2 de $(\mathbf{V}_{n,n-q}, \mathbf{V}_{n,n-q-2}, \mathbf{V}_{q+2,q}, p_{n-q-2,n-q})$ sont triviales (cf. démonstration de la Prop. 10.2 et la remarque ci-dessus). De même, si q est pair, les algèbres spectrales sur R et sur K_2 de $(\mathbf{V}_{n,n-q}, \mathbf{V}_{n,n-q-1}, \mathbf{S}_q, p_{n-q-1,n-q})$ sont triviales. Notre proposition résulte alors par récurrence des Prop. 8.2 et 10.1.

Chapitre IV. Le Theoreme Principal

Nous démontrons dans ce chapitre le théorème qui nous permettra d'étudier la transgression dans les espaces fibrés principaux; sa démonstration ne fait intervenir que les propriétés formelles de l'algèbre spectrale des espaces fibrés, aussi en donnons-nous ici un énoncé algébrique, renvoyant aux chapitres suivants pour les applications topologiques.

La notion de relation introduite dans le §11 pourrait être étudiée plus complètement; nous n'avons pas cherché à faire un exposé systématique, mais uniquement à établir les résultats utiles pour la suite. Ils sont en partie à rapprocher de théorèmes obtenus par J. L. Koszul dans théorie de l'homologie des S-modules [22].

La lecture du §17 est inutile pour la compréhension de la suite de ce travail. Il figure néanmoins ici car la Prop. 17.1 a déjà été utilisée dans [1] et sa démonstration se rattache directement à celle du théorème principal.

§11. La notion de relation

Dans tout ce chapitre, B désigne une algèbre sur un corps K qui sauf mention du contraire, est de caractéristique quelconque, graduée par les sous-espaces $B^i (i \geqq 0)$, anticommutative, munie d'un élément neutre 1 qui est base de B^0. Si $b_1, \cdots, b_n$ sont des éléments homogènes de B, les idéaux à gauche, à droite, bilatères qu'ils engendrent coïncident, on peut parler de l'idéal de $b_1, \cdots, b_n$ que nous noterons $(b_1, \cdots, b_n)$.

Definition. *Soient* $b_1, \cdots, b_n \in B$ *homogènes; une égalité*

$$(11.1) \qquad a_1 b_{i_1} + \cdots + a_m b_{i_m} = 0 \qquad (i_1 < i_2 < \cdots < i_m ; Da_j + Db_{i_j} = k)$$

est une relation de degré k entre $b_1, \cdots, b_n$ s'il existe au moins un indice j tel que $a_j \notin (b_{i_1}, \cdots, b_{i_{j-1}}, b_{i_{j+1}}, \cdots, b_{i_m})$.[13]

$b_1, \cdots, b_n$ sont sans relations jusqu'à k, (*ou pour $D \leqq k$*), *s'il n'existe aucune relation* (11.1) *dans laquelle les termes $a_j b_{i_j}$ sont homogènes d'un même degré $\leqq k$.*

Nous donnerons plus bas plusieurs énoncés différents de la condition "$b_1, \cdots, b_n$ sont sans relations pour $D \leqq k$". Il peut paraître plus naturel d'appeler relation entre $b_1, \cdots, b_n$ une égalité

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = 0 \qquad (Da_i + Db_i = k) \tag{11.2}$$

pour laquelle il existe j tel que $a_j \notin (b_1, \cdots, b_{j-1}, b_{j+1}, \cdots, b_n)$; cette définition n'est pas équivalente à la précédente et donne moins de relations entre $b_1, \cdots, b_n$; dans ce nouveau sens, la condition "$b_1, \cdots, b_n$ sans relations pour $D \leqq k$" serait plus faible que dans notre définition, et moins maniable ici.

P désignera un espace vectoriel sur K, de dimension finie gradué par des sous-espaces P^i, $(i > 0)$; sauf mention expresse du contraire on supposera $P^i = 0$ si i est pair.

Soit encore $J = B \otimes \wedge P$ le produit tensoriel (gauche) sur K de B et de $\wedge P$; dans la suite, J jouera le rôle du terme H_2 d'une algèbre spectrale d'un espace fibré, B et $\wedge P$ remplaçant respectivement $H(B, K)$ et $H(F, K)$, aussi adopterons-nous pour les degrés les notations du §4: l'élément $h = b^p \otimes x^q$, $(b^p \in B^p, x^q \in (\wedge P)^q)$, a les trois degrés $DBh = p$, $DFh = q$, $Dh = p + q$; on peut encore graduer J par les sous-espaces $B \otimes \wedge^j P$, on dira que j est le *degré extérieur*. Nous supposons dans le §11 J muni d'une différentielle d qui augmente D de 1 et qui vérifie:

$$d(B \otimes 1) = 0; \qquad d(1 \otimes P) = Q \otimes 1 \qquad (Q \subset B) \tag{11.3}$$

Q est donc un sous-espace gradué par des degrés pairs, il fait partie du centre de B; la différentielle est aussi homogène en le degré extérieur, qu'elle diminue de 1; $H(J)$ admet ainsi deux graduations induites l'une par D, l'autre par le degré extérieur; si de plus tous les éléments de P ont un même degré $s - 1$, la différentielle est aussi homogène en DF, qu'elle diminue de $s - 1$, en DB qu'elle augmente de s, ces deux graduations se transmettent aussi à $H(J)$.

LEMME 11.1. *On suppose que P a une base $p_1, \cdots, p_m$ formée d'éléments ayant le même degré impair $s - 1$ et on munit J de la différentielle d définie par $d(B \otimes 1) = 0$, $d(1 \otimes p_i) = q_i \otimes 1$, $(Dq_i = s, i = 1, \cdots, m)$. Alors*

(a) *Les éléments de DF nul de $H(J)$ forment une algèbre isomorphe à $B/(q_1, \cdots, q_m)$.*

(b) *Si les cocycles de $DB \leqq k - s$ et de degré extérieur* 1 *sont des cobords, il en est de même des cocycles ayant un $DB \leqq k - s$ et un degré extérieur $\geqq 1$.*

(a) est clair; nous démontrerons (b) par récurrence sur m, il est évident pour $m = 1$, nous le supposons vrai pour $m - 1 \geqq 1$.

Soit $B' = B/(q_1)$, P' l'espace vectoriel de base $p_2, \cdots, p_m$ $J' = B' \otimes \wedge P'$;

[13] Si $m = 1$, cela signifie que $a_1 \neq 0$.

on note h' l'image de $h \in B \otimes \wedge P'$ dans $B' \otimes \wedge P'$ par l'homomorphisme canonique f de $B \otimes \wedge P'$ sur J'; $B \otimes \wedge P'$ s'identifie à une sous-algèbre de $B \otimes \wedge P$, stable pour d; on suppose $B \otimes \wedge P'$ munie de la différentielle d induite par d et on introduit dans J' une différentielle d' par

$$(11.4) \qquad d'(B' \otimes 1) = 0; \qquad d'(1 \otimes p_i) = q_i' \otimes 1 \quad (i = 2, \cdots, m)$$

f est alors compatible avec les structures d'algèbres différentielles bigraduées. Nous divisons la démonstration du lemme en trois parties.

(i) Montrons que J' vérifie aussi l'hypothèse (b) du lemme; soit $h' = b_2' \otimes p_2 + \cdots + b_m' \otimes p_m$ un cocycle de $DB \leqq k - s$; cela signifie que $b_2'q_2' + \cdots + b_m'q_m' = 0$, il existe donc $b_1 \in B$ tel que $b_1q_1 + \cdots + b_mq_m = 0$ et

$$u = b_1 \otimes p_1 + b_2 \otimes p_2 + \cdots + b_m \otimes p_m$$

est un cocycle de J, de $DB \leqq k - s$, de degré extérieur 1, donc par hypothèse $u = dv$; écrivons:

$$v = (1 \otimes p_1)h_1 + h_2 \qquad (h_1, h_2 \in B \otimes \wedge P')$$

d'où

$$b_2 \otimes p_2 + \cdots + b_m \otimes p_m = (q_1 \otimes 1)h_1 + dh_2$$

et

$$h' = d'h_2'$$

ainsi J' vérifie l'hypothèse (b), notre lemme vaut dans J' par hypothèse de récurrence.

(ii) Soit Ann q_1 l'annulateur de q_1 dans B; nous voulons prouver par récurrence sur n que Ann $q_1 \cap B^n = 0$ pour $0 \leqq n \leqq k - s$.

Supposons le vrai pour les degrés $<n$ et soit $b \in$ Ann $q_1 \cap B^n$ alors $b \otimes p_1$ est un cocycle de $DB \leqq k - s$, de degré extérieur 1, par hypothèse $b \otimes p_1 = dh$, où

$$h = (1 \otimes p_1)h_1 + h_2$$
$$(h_1, h_2 \in B \otimes \wedge P', DBh_1 = DBh_2 = n - s)$$

donc

$$b \otimes p_1 = -(1 \otimes p_1)dh_1; \qquad (q_1 \otimes 1)h_1 + dh_2 = 0$$

par conséquent $d'h_2' = 0$ et d'après (i) on a $h_2' = d'h_3'$, c'est à dire

$$h_2 = dh_3 + (q_1 \otimes 1)h_4,$$
$$(h_3, h_4 \in B \otimes \wedge P', DBh_3 = DBh_4 = n - 2s)$$

mais alors

$$(q_1 \otimes 1)h_1 + (q_1 \otimes 1)dh_4 = 0$$

et $h_1 = -dh_4$ puisque Ann $q_1 = 0$ pour $DB < n$ et que $DBh_1 = DBdh_4 = n - s$ finalement

$$b \otimes p_1 = -(1 \otimes p_1)ddh_4 = 0 \text{ et } b = 0$$

(iii) Nous pouvons maintenant établir (b) pour J; soit

$$h = (1 \otimes p_1)h_1 + h_2$$

$$(h_1, h_2 \in B \otimes \wedge P', DBh_1 = DBh_2 \leqq k - s)$$

un cocycle de $DB \leqq k - s$, de degré extérieur >0; alors $d'h_2' = 0$, donc $h_2' = d'h_3'$ ou encore

$$h_2 = dh_3 + (q_1 \otimes 1)h_4,$$

$$(h_3, h_4 \in B \otimes \wedge P', DBh_3 = DBh_4 \leqq k - 2s)$$

$dh = 0$ donne alors

$$0 = (q_1 \otimes 1)h_1 + dh_2 = (q_1 \otimes 1)(h_1 + dh_4)$$

et d'après (ii):

$$h_1 + dh_4 = 0$$

finalement

$$h = (1 \otimes p_1)(-dh_4) + dh_3 + (q_1 \otimes 1)h_4 = d(h_3 + (1 \otimes p_1)h_4) \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Afin d'abréger nous écrirons Ann q_i dans $B/(q_1, \cdots, q_{i-1})$ pour annulateur dans $B/(q_1, \cdots, q_{i-1})$ de l'image de q_i dans cette algèbre.

Proposition 11.1. *On suppose que $J = B \otimes \wedge P$ vérifie les hypothèses du lemme* 11.1. *Alors les quatre conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *Les cocycles de degré extérieur* 1 *et de $DB \leqq k - s$ de J sont des cobords.*

(2) $q_1, \cdots, q_m$ *sont sans relations dans B jusqu'à k.*

(3) *Pour toute permutation $j_1, \cdots, j_m$ de* $1, \cdots, m$, Ann q_{j_i} *dans $B/(q_{j_1}, \cdots, q_{j_{i-1}})$ n'a pas d'élément non nul de $D \leqq k - s$* $(j = 1, \cdots, m)$.[14]

(4) Ann q_i *dans $B/(q_1, \cdots, q_{i-1})$ n'a pas d'élément non nul de $D \leqq k - s$* $(i = 1, \cdots, m)$.

Il est immédiat que (2) et (3) sont équivalentes et que (3) implique (4); le lemme 11.1 et les points (i), (ii) de sa démonstration permettent de montrer aisément, par récurrence sur i, que (1) entraîne (3); il reste donc à voir que (4) implique (1); c'est évident si P est de dimension 1, supposons le vrai lorsque P est de dimension $m - 1$, donc en particulier pour J', en reprenant les notations de la démonstration du lemme 11.1. Soit

$$h = b_1 \otimes p_1 + b_2 \otimes p_2 + \cdots + b_m \otimes p_m$$

$$(DBh = t \leqq k - s)$$

[14] Pour $i = 1$, cela signifie que l'annulateur de q_{j_1} dans B n'a pas d'élément non nul de degré $\leqq k - s$.

un cocycle; $b'_2 \otimes p_2 + \cdots + b'_m \otimes p_m$ est alors un cocycle de J', de $DB \leqq k - s$, donc un cobord, d'où

$$b_2 \otimes p_2 + \cdots + b_m \otimes p_m = dh_1 + (q_1 \otimes 1)h_2 ,$$

$$(h_1 , h_2 \in B \otimes \wedge P')$$

$$(-1)^t(b_2 q_2 + \cdots + b_m q_m) \otimes 1 = (q_1 \otimes 1)dh_2$$

mais h est un cocycle par hypothèse, donc $b_2q_2 + \cdots + b_mq_m = -b_1q_1$ et puisque Ann q_1 est nul pour $D \leqq k - s$, on voit que

$$(-1)^{t+1} (b_1 \otimes 1) = dh_2$$

d'où $h = -(1 \otimes p_1)dh_2 + dh_1 + (q_1 \otimes 1)h_2 = d(h_1 + (1 \otimes p_1)h_2)$.

Remarques. (1) La condition (1) est trivialement remplie si $k < s$; pour $k = s$, elle signifie que $q_1 , \cdots , q_m$ sont linéairement indépendants. Si $p'_1 , \cdots , p'_m$ est une deuxième base de P, il est clair qu'elle vérifiera ou ne vérifiera pas la condition (1) en même temps que $p_1 , \cdots , p_m$. Par conséquent si $q_1 , \cdots , q_m$ sont sans relations pour $D \leqq k$, $(k \geqq s)$, les éléments d'une deuxième base $q'_1 , \cdots , q'_m$ de l'espace Q sous-tendu par $q_1 , \cdots , q_m$ sont aussi sans relations pour $D \leqq k$. Pour éviter d'introduire inutilement des bases, on dira alors que Q est sans relations pour $D \leqq k$. La condition (2), pour $k \geqq s$, est donc équivalente à: Q est isomorphe par d à P et est sans relations pour $D \leqq k$.

(2) Disons que $q_1 , \cdots , q_m$ sont algébriquement indépendants jusqu'à k quand la condition suivante est réalisée: Si $P(x_1 , \cdots , x_m)$ est un élément non nul de $K[x_1 , \cdots , x_m]$ et si $P(q_1 , \cdots , q_m)$ est, en tant qu'élément de B, somme de monômes homogènes d'un même degré $\leqq k$, alors $P(q_1 , \cdots , q_m) \neq 0$. Il est clair que si $q_1 , \cdots , q_m$ sont sans relations pour $D \leqq k$, ils sont algébriquement indépendants pour $D \leqq k$, lorsque $1, q_1 , \cdots , q_m$ engendrent B jusqu'à k.

(3) On a des résultats analogues aux précédents quand les p_i ne sont pas tous de même degré; on suppose alors $Dq_i = Dp_i + 1$, (Dq_i pair), on remplace la condition (1) par: les cocycles de degré extérieur 1 et de $D \leqq k - 1$ sont des cobords; la conclusion (b) du lemme 11.1 devient: tout cocycle de degré extérieur >0 de J dont le cobord a, formellement, un $DB \leqq k$, est lui-même un cobord, mais nous n'utiliserons pas cette extension.

§12. Propositions auxiliaires

Nous considérerons dans les §12 à 15 une algèbre spectrale canonique (cf §1C), (H_r), $(r \geqq 2)$, dans laquelle $H_2 = B \otimes \wedge P$, P étant gradué par des degrés impairs; les sous-espaces $H_2^{p,q}$ sont:

$$H_2^{p,q} = B^p \otimes (\wedge P)^q$$

la différentielle d_2 diminue q de 1, augmente p de 2, en particulier $d_2(B \otimes 1) = 0$.

On pose $B_r = \kappa_r^2(B \otimes 1)$; si un sous-espace S de $\wedge P$ est formé de d_r-cocycles pour $r < j$, κ_j^2 applique $1 \otimes S$ isomorphiquement dans H_j ; on désignera aussi par $1 \otimes S$ ce sous-espace de H_j, lorsque cela ne prêtera pas à confusion;

m sera le maximum du degré de P et on pose

$$P_*^i = P^i + P^{i+1} + \cdots + P^m.$$

Enfin, dans les formules, on désignera par $=$, resp. $\subset$, un isomorphisme sur, resp. dans, que le contexte précisera.

Definition. *$A(t, k)$ est l'ensemble des deux affirmations suivantes:*

(1) *$d_r\kappa_r^2(1 \otimes P_*^r) = 0$ pour $2 \leqq r \leqq t$.*

(2) *Si $i \leqq \min(t, k)$, $Q^i = d_i\kappa_i^2(1 \otimes P^{i-1})$ est isomorphe à P^{i-1} et Q^i est sans relations dans B_i pour $D \leqq k$.*

Disons par analogie avec la quatrième définition de la transgression (§5), que $x \in (\wedge P)^{i-1}$ est *transgressif* si $d_r\kappa_r^2(1 \otimes x) = 0$ pour $r < i$. Si $A(t, k)$ est vrai, les éléments de $D \leqq t$ de P sont transgressifs. Pour $k = 0, 1$ la condition (2) de la définition précédente est vide et en particulier si $t \geqq m$, $A(t, 0)$ signifie exactement que les éléments homogènes de P sont transgressifs.

La proposition suivante jouera un rôle essentiel dans la démonstration du théorème que nous avons en vue.

Proposition 12.1. *Si $A(t, k)$ est vrai dans (H_r), on a pour $2 \leqq r \leqq \min(t, k)$*

(1_r) $$H(B_r \otimes \wedge P^{r-1}) \otimes \wedge P_*^r \subset H_{r+1} \qquad \text{pour } DB \leqq k$$

(2_r) $$H_{r+1} = H(B_r \otimes \wedge P^{r-1}) \otimes \wedge P_*^r = B_r/(Q^r) \otimes \wedge P_r^* = B_{r+1} \otimes \wedge P_*^r \qquad (\text{si } DB \leqq k - r)$$

(3_r) *$\kappa_{r+1}^2(B \otimes \wedge P_*^r)$ est un quotient de $B_{r+1} \otimes \wedge P_*^r$ et lui est égal pour $DB \leqq k$.*

Nous poserons $S_r = B_r \otimes \wedge P_*^{r-1} = B_r \otimes \wedge P^{r-1} \otimes \wedge P_r^*$ et le munissons d'une différentielle δ_r nulle sur $B_r \otimes \wedge P_*^r$, égale à d_r sur P^{r-1}. Les éléments de $B \otimes \wedge P_*^{r-1}$ sont des d_i-cocycles pour $i < r$ $T_r = \kappa_r^2(B \otimes \wedge P_*^{r-1})$ est bien défini; dans le noyau de κ_r^2 figure en particulier le noyau de $\kappa_r^2 : B \otimes 1 \to B_r$, κ_r^2 définit donc par passage au quotient un homomorphisme f_r de S_r sur T_r et il est clair que $d_r \circ f_r = f_r \circ \delta_r$. Dans ces notations, nos affirmations s'écrivent:

(1_r) $$H(S_r) \subset H_{r+1} \qquad \text{pour } DB \leqq k$$

(2_r) $$H_{r+1} = H(S_r) = B_r/(Q^r) \otimes \wedge P_*^r = S_{r+1} \qquad \text{pour } DB \leqq k - r$$

(3_r) *T_{r+1} est un quotient de S_{r+1} il lui est égal pour $DB \leqq k$,*
nous démontrerons également

(4_r) *l'isomorphisme de (1_r) et le premier isomorphisme de (2_r) sont induits par f_r, l'isomorphisme $H_{r+1} = S_{r+1}$ $(DB \leqq k - r)$, de (2_r) et l'homomorphisme de (3_r) sont induits par f_{r+1}.*

(1_2) est évident (pour DB quelconque du reste), (2_2) se déduit de la Prop. 11.1 et du lemme 11.1; les cobords contenus dans $B \otimes \wedge P_*^2$ sont $d_2(B \otimes P^1 \otimes \wedge P_*^2 = (Q^2) \otimes \wedge P_*^2$, d'où (3_2); (4_2) est clair.

Supposons (1_{r-1}), (2_{r-1}), (3_{r-1}), (4_{r-1}) établis et $r \leqq \min(t, k)$ pair, car pour r impair, $P^{r-1} = 0$ et le passage à r est immédiat; f_r qui est un homomorphisme permis de S_r sur $T_r \subset H_r$ définit en tout cas un homomorphisme de $H(S_r)$ dans $H(H_r) = H_{r+1}$; soit h un d_r-cocycle de T_r et $DBh \leqq k$, alors si h est un cobord dans H_r, c'est déjà un cobord dans T_r ; soit en effet $h = d_r u$, $(u \in H_r)$, on a $DBu \leqq k - r$ et puisque $f_r(S_r) = H_r$ pour $DB \leqq k - r$ vu 2_{r-1} et (4_{r-1}) il existe $v \in S_r$ tel que $u = f_r(v)$, donc $u \in T_r$ et $h = d_r u \in d_r T_r$ si de plus $h = f_r(h')$, où h' est un cocycle de S_r, on a $h' = \delta_r v$ puisque f_r est un homomorphisme permis et qu'il est biunivoque pour $D \leqq k$ d'après (3_{r-1}) et (4_{r-1}). Cela montre que

$$(12.1) \qquad d_r(H_r) \cap \kappa_r^2(B \otimes \wedge P_*^r) = f_r((Q^r) \otimes \wedge P_*^r) \qquad \text{pour } DB \leqq k$$

(car le deuxième membre représente visiblement tous les δ_r-cobords contenus dans $B_r \otimes \wedge P_*^r$), et que f_r applique $H(S_r)$ isomorphiquement dans H_{r+1} pour $DB \leqq k$, c'est (1_r) et la lère affirmation de (4_r). Mais on sait de plus que $f_r(S_r) = H_r$ pour $DB \leqq k - r + 1$ d'après (2_{r-1}) et (4_{r-1}), f_r applique donc $H(S_r)$ biunivoquement sur H_{r+1} pour $DB \leqq k - r + 1$; cela contient la première égalité de (2_r) et la deuxième affirmation de (4_r); la deuxième égalité de (2_r) résulte alors de la Prop. 11.1 et du lemme 11.1. L'égalité (12.1) montre notamment que $(Q^r) = d_r(H_r) \cap B_r$ pour $DB \leqq k$, autrement dit que

$$(12.2) \qquad B_{r+1} = \kappa_{r+1}^r B_r = B_r/(Q^r) \qquad \text{pour } DB \leqq k$$

ce qui contient la troisième égalité de (2_r). Par définition:

$$\kappa_{r+1}^2(B \otimes \wedge P_*^r) = \kappa_{r+1}^r \kappa_r^2(B \otimes \wedge P_*^r) = \kappa_{r+1}^r f_r(B_r \otimes \wedge P_*^r)$$

$(Q^r) \otimes \wedge P_*^r \in \delta_r(S_r)$, l'homomorphisme f_r l'envoie donc dans $d_r H_r$, c'est à dire dans le noyau de κ_{r+1}^r, d'où par passage au quotient un homomorphisme de $B_r/(Q^r) \otimes \wedge P_*^r$ sur T_{r+1} ; c'est évidemment f_{r+1} pour $DB \leqq k$, vu (12.2), ainsi f_{r+1} induit bien l'isomorphisme $H_{r+1} = S_{r+1}$ $(DB \leqq k - r)$; de plus nous savons que pour $DB \leqq k$ f_r est un isomorphisme de S_r sur T_r, d'après (3_{r-1}) et (4_{r-1}), et vu (12.1) qu'il envoie $(Q^r) \otimes \Lambda P_*^r$ sur le noyau de κ_{r+1}^r: $\kappa_r^2(B \otimes \Lambda P_*^r) \to T_{r+1}$ il induit par conséquent un isomorphisme de $B_r/(Q^r) \otimes \Lambda P_*^r$ sur T_{r+1} pour $DB \leqq k$, qui est bien, vu (12.2), l'isomorphisme de S_{r+1} sur T_{r+1} induit par f_{r+1} ; cela démontre (3_r) et la dernière affirmation de (4_r).

Remarque. Supposons $k \geqq t$, soit $x_1, \cdots, x_s$ une base de $P^1 + \cdots + P^{t-1}$ et $y_i \in B$ tel que

$$\kappa_{r_i}^2(y_i \otimes 1) = d_{r_i} \kappa_{r_i}^2(1 \otimes x_i),$$

$$(i = 1, \cdots, m; r_i = Dx_i + 1)$$

et soit $\bar{Q}^j$ le sous-espace sous-tendu par les y_i de degré j; il est clair que $\bar{Q}^j$ est appliqué isomorphiquement sur Q^j par κ_j^2 et que

$$(12.3) \qquad B_r = B/(\bar{Q}^1 + \cdots + \bar{Q}^{r-1}) \qquad \text{pour } DB \leqq k, r = 3, 4, \cdots, t + 1.$$

De Q^j sans relations dans B_j pour $D \leqq k, j = 1, \cdots, t$, on tire que Ann y_i dans $B/(y_1, \cdots, y_{i-1})$ est nul pour $D \leqq k (i = 1, \cdots, s)$, donc que $y_1, \cdots, y_s$ sont sans relations pour $D \leqq k$ dans B (Prop. 11.1)

LEMME 12.1. *On suppose $A(t, k)$ vrai et H_∞ triviale pour $D \leqq k$. Soit $h_p \in H_p$, $h_p \neq 0, 0 < D(h_p) \leqq k, DF(h_p) < p - 1$.*

Alors il existe $x \in H_2$, et un entier $s \geqq 2$ tels que

$$d_r \kappa_r^2 x = 0 \qquad (r < s);$$
$$d_s \kappa_s^2 x = \kappa_s^2 h_p \neq 0$$

et $DF(h_p) = 0$ lorsque $s \leqq \min (t, k)$ ou encore si $t \geqq k$.

d_r diminue DF de $r - 1$, donc h_p est un d_r-cocycle pour tout $r \geqq p$; H_∞ étant triviale pour $D \leqq k$, il doit exister x et s tels que

$$d_r \kappa_r^2 x = 0 \qquad (r < s);$$
$$d_s \kappa_s^2 x = \kappa_s^2 h_q \neq 0$$
$$(Dx = Dh_p - 1, DBx = DBh_p - s)$$

Si $s \leqq \min (t, k)$, on a puisque $DB(x) \leqq k - s$: $\kappa_s^2 x \in B_s \otimes \Lambda P_*^{s-1}$ (Prop. 12.1), et $DF(d_s\kappa_s^2 x) < p - 1 \leqq s - 1$ donne $DF(d_s\kappa_s^2 x) = DF(h_p) = 0$. Si $t \geqq k$ et $DF(h_p) \neq 0$, alors $s > \min (t, k)$ donc $s > k$ et $DB(h_p) = DB(x) + s > k$, ce qui est absurde puisque $D(h_p) \leqq k$ et termine la démonstration du lemme.

PROPOSITION 12.2. *On suppose $A(t, 0)$ vrai et H_∞ triviale pour $D \leqq t$. Alors*

(a) *$A(t, t + 1)$ est vrai; P contient tous les éléments homogènes transgressifs de $\wedge P$ ayant un degré $\leqq t$.*

(b) *soient $x_1, \cdots, x_l$ une base de $P^1 + \cdots + P^{t-1}$ et $y_i \in B$ vérifiant $\kappa_r^2(y_i \otimes 1) = d_r\kappa_r^2(1 \otimes x_i)$, $(r = Dx_i + 1)$; $y_1, \cdots, y_l$ engendrent $B^j (0 < j \leqq t)$ et $B = K[y_1, \cdots, y_l]$ pour $D \leqq t$.*

(a) Q^i est isomorphe à $P^{i-1} (i = 2, \cdots, t)$, car sinon P^{i-1} contiendrait un élément non nul cocycle pour tout d_r et aurait une image non nulle dans H_∞ alors que ce dernier est trivial pour $D \leqq t$. Supposons $A(t, k)$ vrai et $k \leqq t$, si $A(t, k + 1)$ est faux il existe i, $(2 \leqq i \leqq t)$, tel que Q^i possède une relation de $D = k + 1$; mais pour $DB \geqq k$, d'après la Prop. 12.1 (1_i):

$$H(B_i \otimes \wedge P^{i-1}) \otimes \wedge P_*^i \subset H_{i+1}$$

il doit alors exister (Prop. 11.1):

$$h \in H_{i+1}, \qquad h \neq 0, \qquad Dh = k, \qquad DFh = i - 1 \neq 0$$

ce qui contredit le lemme 12.1 puisque $t \geqq k$, et montre que $A(t, k + 1)$ est vrai, d'où $A(t, t + 1)$ par récurrence.

Soit $x \in (\wedge P)^{i-1}$, $(i \leqq t + 1)$, transgressif; alors d'après la Prop. 12.1 2_i on a $\kappa_i^2(1 \otimes x) \in \kappa_i^2(1 \otimes \wedge P_*^{i-1})$, donc $x \in P^{i-1}$.

(b) On sait déjà que $y_1, \cdots, y_l$ sont sans relations pour $D \leqq t + 1$ (remarque à la Prop. 12.1); il suffit de montrer qu'ils engendrent $B^j (0 < j \leqq t)$ et pour cela que $B^j \in (y_1, \cdots, y_l)$ pour tout j vérifiant $0 < j \leqq t$; or si $b \in B^j$, $b \notin (y_1, \cdots, y_l)$, alors $\kappa_{t+1}^2 b \neq 0$ et vu la trivialité de H_∞, b doit être pour un $s \geqq t+1$ le d_s-cobord d'un élément x qui vérifie forcément $Dx = j - 1$, $DFx = s - 1 > 0$, $DBx = j - s < j - t$, donc (Prop. 12.1 2_t):

$$\kappa_{t+1}^2 x \in B_{t+1} \otimes \wedge P_*^t$$

et DFx qui est >0 doit être $\geqq t$, ce qui est impossible puisque $Dx = j - 1 \leqq t - 1$.

PROPOSITION 12.3. *On suppose $A(m + 1, 0)$ vrai, m étant le maximum du degré de P, et H_∞ triviale jusqu'à $n \geqq m$. Alors*

(a) *$A(m + 1, n + 1)$ est vrai, et P contient tous les éléments transgressifs de $\wedge P$.*

(b) *Soit $x_1, \cdots, x_l$ une base de P, $y_i \in B$ vérifiant $\kappa_r^2(y_i \otimes 1) = d_r\kappa_r^2(1 \otimes x_i)$, $(r = Dx_i + 1, i = 1, \cdots, l)$. On a $B = K[y_1, \cdots, y_l]$ pour $D \leqq n$.*

En effet, si $A(m + 1, 0)$ est vrai, il en est de même de $A(t, 0)$ pour tout $t > m + 1$, et en particulier de $A(n, 0)$, on applique alors la Prop. 12.2.

REMARQUE. Nous avons toujours supposé P de dimension finie, seul cas intéressant pour la suite, mais cette hypothèse n'a en somme pas joué de rôle; en fait, les énoncés et démonstrations des Prop. 12.1 et 12.2 subsistent sans aucun changement si l'on suppose seulement que chaque sous-espace P^i est de dimension finie; on voit même qu'à quelques changements évidents de notations près, les considérations des §11 et 12 valent pour des espaces P^i de dimensions quelconques.

§13. Le théorème principal

Nous désignons toujours par m le maximum du degré de P.

THEOREME 13.1. *Soit (H_r), $(r \geqq 2)$, une algèbre spectrale canonique dans laquelle $H_2 = B \otimes \wedge P$; on suppose P gradué par des degrés impairs et H_∞ triviale pour $D \leqq n$, $(n \geqq 2m + 1)$.*[15] *Alors*

(a) *$\wedge P$ est l'algèbre extérieure d'un sous-espace P' avant une base $x_1, \cdots, x_l$ formée d'éléments homogènes transgressifs; P' contient tous les éléments transgressifs de $\wedge P$.*

(b) *Si $y_i \in B$ vérifie $\kappa_r(y_i \otimes 1) = d_r\kappa_r^2(1 \otimes x_i)$, $(r = Dx_i + 1)$, on a $B = K[y_1, \cdots, y_l]$ pour $D \leqq n$.*

On peut remarquer que dans ce théorème, le point essentiel est une question d'unicité; étant donné P gradué par des degrés impairs, il est clair qu'il existe au moins un B et une algèbre spectrale commencant à $H_2 = B \otimes \wedge P$ et se terminant par une algèbre triviale: il suffit de supposer P sous-tendu par des éléments transgressifs x_i et de définir B et l'algèbre spectrale par la conclusion (b) ci-dessus; le théorème affirme que c'est la seule manière d'y parvenir, à un isomorphisme d'algèbres spectrales près.

Si $P^i = 0$ pour $i < m$, $A(m + 1, 0)$ est évident, le théorème se ramène à la Proposition 12.3; nous supposons dorénavant que P a au moins deux degrés.

[15] Pour la suite, il suffirait de supposer n arbitrairement grand; nous indiquons une borne inférieure pour fixer les idées, ce n'est pas exactement celle qui figure dans [1], (*voir* remarque à la fin du §17).

Etant donné la Prop. 12.3 il suffit d'établir la validité de $A(m + 1, 2m + 1)$,[16] ce que nous ferons par une double récurrence: Dans le §14, nous passerons de $A(t, 2t + 1)$ à $A(t + 1, 2t + 1)$, dans le §15 de $A(t, 2t - 1)$ à $A(t, 2t + 1)$. Il serait naturellement tentant, vu la Prop. 12.3, d'essayer de prouver directement $A(m + 1, 0)$,[16] par exemple par récurrence sur le premier indice seulement, mais cela ne semble pas possible.

§14. Première partie de la démonstration

Faisons tout d'abord quelques remarques simples. Pour $0 < i \leqq t$, $i \leqq n$, $B_{t+1}^{i} = 0$, car vu les propriétés de degrés des différentielles d_r, B_{t+1}^{i} est appliqué isomorphiquement dans H_∞ qui est trivial pour $D \leqq n$. Si P^t est formé d'éléments transgressifs, $Q^{t+1} = d_{t+1}\kappa_{t+1}^{2}(1 \otimes P^t)$ est isomorphe à P^t car sinon P^t aurait une image non nulle dans H_∞, et de plus $B_{t+1}^{t+1} = Q^{t+1}$; en effet $Q^{t+1} = B_{t+1}^{t+1} \cap d_{t+1}(H_{t+1})$ et $0 = B_{t+2}^{t+1} = B_{t+1}^{t+1}/Q^{t+1}$.

Supposons $A(t, 2t + 1)$ vrai; la Prop. 12.1 (2_t) donne

$$H_{t+1} = B_{t+1} \otimes \wedge P_*^t \qquad \text{pour } DB \leqq t + 1 \tag{14.1}$$

donc

$$d_{t+1}\kappa_{t+1}^{2}(1 \otimes P_*^t) \subset B_{t+1}^{t+1} \otimes \wedge P_*^t$$

en particulier si t est pair, $B_{t+1}^{t+1} = Q^{t+1} = 0$, donc P_*^t est formé de d_{t+1}-cocycles et $A(t + 1, 2t + 1)$ est vrai; il nous suffit d'examiner le cas t impair.

LEMME 14.1. *Si $A(t, 2t + 1)$ est vrai (t impair), Q^{t+1} est sans relations pour $D \leqq 2t + 2$, ($t \leqq m$).*

On sait par la Prop. 12.1 (3_t) que

$$S_{t+1} = B_{t+1} \otimes \wedge P^t \otimes \wedge P_*^{t+1} \subset H_{t+1} \qquad \text{pour } DB \leqq 2t + 1$$

si Q^{t+1} a une relation de $DB \leqq 2t + 2$, alors (Prop. 11.1), $B_{t+1} \otimes \wedge P^t$ possède un cocycle h, ($Dh \leqq 2t + 1$, $DFh = t$, $DBh \leqq t + 1$), qui n'est pas contenu dans $d_{t+1}(B_{t+1} \otimes \wedge P^t)$; je prétends que h n'est pas cobord dans H_{t+1} ; en effet si $h = d_{t+1}u$, alors $DFu = 2t$, $DBu = 0$, (donc $DBh = t + 1$), et d'après (14.1), $u \in 1 \otimes \wedge P_*^t$, ou même *puisque* $P^{2t} = 0$, $u \in 1 \otimes \wedge^2 P^t$, et $h \in d_{t+1}(B_{t+1} \otimes \wedge P^t)$ ce qui n'est justement pas. Ainsi $\kappa_{t+2}^{t+1}h \neq 0$, mais comme $DBh \leqq t + 1$, $DFh = t$, cet élément est un d_r-cocycle pour tout $r \geqq t + 1$, et n'est jamais un d_r-cobord, il a une image non nulle dans H_∞, ce qui est absurde car $Dh \leqq 2t + 1 \leqq n$, et démontre le lemme.

PROPOSITION 14.1. *Si $A(t, 2t + 1)$ est vrai ($t \leqq m$), $A(t + 1, 2t + 1)$ est vrai.*[16]

Il suffit de traiter le cas t impair comme nous l'avons dit au début de ce paragraphe. Soit

$$x_1, \cdots, x_k, x_{k+1}, \cdots, x_l$$

$$(Dx_i \leqq t \text{ si } i \leqq k,\ Dx_i > t \text{ si } i > k)$$

[16] Pour une base convenable de $\wedge P$.

une base de $\wedge P$ vérifiant $A(t, 2t + 1)$; nous montrerons que l'on peut ajouter à $x_i (i > k)$ un élément décomposable de manière à obtenir une nouvelle base homogène $x_1, \cdots, x_k, x'_{k+1}, \cdots, x'_l$ de $\wedge P$ vérifiant $A(t + 1, 0)$; comme les éléments de degrés $\leqq t$ n'ont pas été modifiés cette nouvelle base vérifie alors $A(t + 1, 2t + 1)$ vu l'hypothèse et le lemme 14.1.

Supposons notre choix fait pour $k < i \leqq j$, soient V le sous-espace de base $x'_{k+1}, \cdots, x'_j$ et $y_{j+1} = d_{t+1}\kappa^2_{t+1}(1 \otimes x_{j+1})$. La base de $\wedge P$ formée de $x'_{k+1}, \cdots, x'_j$ et des x_i d'indices différents de $k + 1, \cdots, j$ vérifie $A(t, 2t + 1)$, nous appliquons la Prop. 12.1 (2_t) à cette base; on obtient $y_{j+1} \in B_{t+1} \otimes \wedge P^t_*$, ou même $y_{j+1} \in B_{t+1} \otimes \wedge P^t \otimes \wedge V$ car $DFy_{j+1} < Dx_{j+1}$, ce qui peut s'écrire:

$$y_{j+1} = a_1 \otimes v_1 + \cdots + a_p \otimes v_p \qquad (a_i \in B_{t+1} \otimes \wedge P^t, v_i \in \wedge V)$$

on peut supposer $v_1, \cdots, v_p$ linéairement indépendants; $y, v_1, \cdots, v_p$ sont des d_{t+1}-cocycles, donc on a $d_{t+1}a_i = 0 (i = 1, \cdots, p)$; évidemment $DBa_i = t + 1$, donc si $DFa_i \neq 0$, il existe $c_i \in 1 \otimes \wedge P^t$ tel que $a_i = d_{t+1}c_i$ (Lemme 14.1 et Prop. 11.1); si $DFa_i = 0$, alors

$$a_i \in B^{t+1}_{t+1} = Q^{t+1} \otimes 1 = d_{t+1}\kappa^2_{t+1}(1 \otimes P^t)$$

et

$$a_i = d_{t+1}c_i \qquad (c \in 1 \otimes P^t).$$

Finalement nous obtenons un élément décomposable

$$1 \otimes h = c_1 \otimes v_1 + \cdots + c_p \otimes v_p \qquad (h \in \wedge (P^t + V))$$

tel que

$$d_r\kappa^2_r(1 \otimes (x_{j+1} - h)) = 0 \qquad \text{pour } 2 \leqq r \leqq t + 1$$

on prendra $x'_{j+1} = x_{j+1} - h$.

La démonstration est naturellement la même pour $j + 1 = k + 1$, ce qui permet de construire par récurrence la base annoncée, et démontre la Proposition 14.1.

Par des raisonnements analogues mais plus simples, on assure le départ de la récurrence en montrant le:

LEMME 14.2. *$A(2, 3)$ est vrai.*

On prouve tout d'abord que Q^2 est sans relations pour $D \leqq 4$ par le raisonnement du lemme 14.1. On en tire ensuite comme dans la Prop. 14.1 l'existence d'une nouvelle base de $\wedge P$ vérifiant $A(2, 0)$, donc aussi $A(2, 3)$ ou même ici $A(2, 4)$.

§15. Deuxième partie de la démonstration

LEMME 15.1. *Supposons $A(t, 2t - 1)$ vrai $(t \leqq m)$, et soit $h_p \in H_p$, $h_p \neq 0$, $0 < D(h_p) \leqq 2t$, $DF(h_p) < p - 1$*

Alors ou bien il existe s, $(t \geqq s \geqq p)$, tel que $0 \neq \kappa_s^p h_{p_2} \in (Q^s)$ et $DF(h_p) = 0$, ou bien il existe $s > t$ tel que $0 \neq \kappa_s^2 h = d_s \kappa_s^2 x (x \in 1 \otimes P_*^t)$, et $D(h_p)$ est pair.

$\kappa_r^p h_p$ est un d_r-cocycle pour tout $r \geqq p$, H_∞ est triviale pour $D \leqq 2t + 1$, il existe donc $s \geqq p$, $x \in H_2$ tels que

$$d_r \kappa_r^2 x = 0 \qquad (r < s);$$
$$d_s \kappa_s^2 x = \kappa_s h_p \neq 0,$$
$$(Dx \leqq 2t - 1,\ DBx \leqq 2t - s).$$

Supposons tout d'abord $s \leqq t$ et appliquons la Prop. 12.1 (2_{s-1}) pour $k = 2t - 1$; $DBx \leqq 2t - s = 2t - 1 - (s - 1)$ donne

$$\kappa_s^2 x \in B_s \otimes \wedge P_*^{s-1}$$

mais de $DF(d_s \kappa_s^2 x) = DF(h_p) < p - 1 \leqq s - 1$ on tire alors $DF(d_s \kappa_s^2 x) = 0$, $DFx = s - 1$ et

$$\kappa_s^2 x \in B_s \otimes P^{s-1}; \qquad \kappa_s^2 h_p = d_s \kappa_s^2 x \in (Q^s).$$

Si maintenant $s > t$, on a $DBx \leqq 2t - t - 1 = t - 1$; la Prop. 12.1 (2_t) donne

$$\kappa_{t+1}^2 x \in B_{t+1} \otimes \wedge P_*^t$$

mais $B_{t+1}^i = 0$ pour $0 < i \leqq t$ (cf début du §14), par conséquent $x \in 1 \otimes \wedge P_*^t$ ou même $x \in 1 \otimes P_*^t$ car x ne peut être décomposable puisque $Dx \leqq 2t - 1$; comme x est homogène non nul, Dx est forcément impair et $D(h_p)$ est pair.

LEMME 15.2. *Si $A(t, 2t - 1)$ est vrai, B^i est nul pour i impair $\leqq 2t - 1$.*

Si cette affirmation est fausse soit j le plus petit indice impair $\leqq 2t - 1$ pour lequel $B^j \neq 0$ et soit $h \in B^j$, $h \neq 0$; h vérifie pour $p = 2$ les hypothèses du lemme précédent; ici évidemment les degrés $\leqq j$ de (Q^i) sont pairs; on devrait donc être dans la deuxième alternative, mais alors j est pair, ce qui est absurde.

PROPOSITION 15.2. *Si $A(t, 2t - 1)$ est vrai $(t \leqq m)$, alors $A(t, 2t + 1)$ est vrai.*

Supposons $A(t, k)$ vrai, $(2t - 1 \leqq k < 2t + 1)$; si $A(t, k + 1)$ est faux il existe i, $(2 \leqq i \leqq t)$, tel que Q^i ait une relation de degré $k + 1$ et i est forcément *pair*; la Prop. 12.1 (1_i) donne

$$H(B_i \otimes \wedge P^{i-1}) \otimes \wedge P_*^i \subset H_{i+1} \qquad \text{pour } DB \leqq k$$

et (Prop. 11.1), il existe

$$h \in H_{i+1}, \quad h \neq 0, \quad Dh = k, \quad DFh = i - 1, \quad DBh = k - i + 1$$

$DBh = k - i + 1 \leqq 2t - i + 1 \leqq 2t - 1$, donc DBh est *pair* (Lemme 15.2) et $Dh = DBh + i - 1$ est *impair*; d'autre part h vérifie les hypothèses du lemme 15.1 pour $p = i + 1$; comme $DFh = i - 1$ est $\neq 0$, on doit être dans la deuxième alternative, et Dh doit être *pair*, en contradiction avec ce que nous avons vu précédemment. Par conséquent $A(t, k + 1)$ est vrai.

Le lemme 14.2, les Prop. 14.1 et 15.1 permettent de prouver par récurrence que $A(m + 1, 2m + 1)$ est vrai et notre théorème résulte alors comme nous l'avons déjà remarqué de la Prop. 12.3.

§16. Un complément en caractéristique deux

Dans ce paragraphe, nous supposons $K = K_2$ de caractéristique deux. Si F est une algèbre sur K_2 admettant un système simple de générateurs $p_1, \cdots, p_l$ et si P est l'espace de base $p_1, \cdots, p_l$ on écrira $F = \Delta P$; si P' est un sous-espace de P ayant une base $q_1, \cdots, q_s$ formée d'éléments pris parmi les p_i, on notera $\Delta P'$ le sous-espace de F ayant une base formée de l'élément neutre et des monômes $q_{i_1} \cdots q_{i_k} (i_1 < \cdots < i_k ; k = 1, \cdots, s)$; si P'' est un deuxième sous-espace du même type que P' et si $P' \cap P'' = 0$, on a évidemment $\Delta(P' + P'') = \Delta P' \otimes \Delta P''$ (produit tensoriel de modules); $\Delta P'$ n'est pas forcément une sous-algèbre.

En caractéristique 2, le lemme 11.1 vaut aussi naturellement pour s impair. Plus généralement il reste valable si l'on remplace $\wedge P$ par ΔP, s étant de parité quelconque. En effet, il y a un isomorphisme d'espaces vectoriels évident de $B \otimes \Delta P$ sur $B \otimes \wedge P$; cet isomorphisme est compatible avec les quatre graduations et avec les différentielles, il s'ensuit que le lemme 11.1 vaut aussi pour $B \otimes \Delta P$. Cet isomorphisme n'est pas forcément compatible avec le produit, mais néanmoins respecte le produit de monômes $p_{i_1} \cdots p_{i_k}$ et $p_{j_1} \cdots p_{j_s}$ si les i_μ sont tous différentes des $j_\nu (i_1 < \cdots < i_k ; j_1 < \cdots < j_s)$, par conséquent la démonstration même du lemme 11.1 vaut pour $B \otimes \Delta P$, une fois $\wedge$ remplacé par Δ. Ces remarques montrent aussi que l'on peut appliquer le lemme 11.1 au cas $J = B \otimes \Delta P$, même si ΔP n'est pas une algèbre, mais est plongée dans une algèbre F à système simple de générateurs comme le sous-espace $\Delta P'$ mentionné au début de ce paragraphe.

De cela résulte évidemment que la Prop. 11.1, les résultats du §12 et leurs démonstrations subsistent si on substitue Δ à $\wedge$. La Prop. 12.3 donne:

Proposition 16.1 *Soit (H_r), $(r \geqq 2)$, une algèbre spectrale canonique sur K_2, dans laquelle $H_2 = B \otimes F$, où $F = \Delta P$ est une algèbre commutative admettant un système simple de générateurs $x_1, \cdots, x_l$ dont les degrés sont >0, de parités quelconques. On suppose H_∞ triviale pour $D \leqq n$, et les x_i transgressifs.*

Si $y_i \in B$ vérifie $\kappa_r^2(y_i \otimes 1) = d_r \kappa_r^2(1 \otimes x_i)$, $(r = Dx_i + 1, i = 1, \cdots l)$, alors $y_1, \cdots, y_l$ sont sans relations pour $D \leqq n$ et $B = K_2[y_1, \cdots, y_l]$ pour $D \leqq n$; P contient tous les éléments transgressifs de F.

Dans cette proposition, nous ne supposons pas $x_i \cdot x_i = 0$ ni Dx_i impair, mais par contre *nous admettons que x_i est transgresif;* c'est donc beaucoup plus un analogue faible qu'une généralisation de théorème 13.1 pour $K = K_2$; des exemples montrent du reste que le théorème 13.1 peut être mis en défaut pour $K = K_2$ si P a des degrés pairs.

§17. Un complément pour les caractéristiques différentes de deux

Comme nous l'avons dit au début de ce chapitre, le §17 est consacré à un résultat utilisé dans [1] mais qui n'interviendra jamais dans la suite de ce travail.

Dans [1] il est question de fibrations dont les fibres ont la cohomologie d'un produit de sphères; leur algèbre de cohomologie admet donc un système simple de générateurs de carrés nuls. Nous écrirons $F = MP$ si l'algèbre anticommutative F admet un système simple de générateurs $p_1, \cdots, p_l$ de carrés nuls, P désignant l'espace sous-tendu par $p_1, \cdots, p_l$; cette notation est un peu incorrecte car une autre base homogène $p_1', \cdots, p_l'$ de P ne constitue pas en général un système simple de générateurs de carrés nuls, néanmoins nous l'utiliserons pour abréger et parce qu'elle ne prêtera pas à confusion dans la suite. Si P' et P'' sont les espaces de bases $p_1, \cdots, p_k$ et $p_{k+1}, \cdots, p_l$, $\mathrm{M}P'$ et $\mathrm{M}P''$ sont des sous-algèbres et on a $\mathrm{M}P = \mathrm{M}P' \otimes \mathrm{M}P''$ (produit tensoriel gauche). Bien entendu, si P est gradué par des degrés impairs $\mathrm{M}P = \wedge P$.

Nous considérerons une algèbre spectrale canonique (H_r), $(r \geqq 2)$, dans laquelle $H_2 = B \otimes \mathrm{M}P$.

Definition. *On dit que $A^*(t, k)$ est vrai dans (H_r) si $P^i = 0$ pour i pair $\leqq t - 1$ et si $A(t, k)$ est vrai.*

Il est clair que les résultats et démonstrations du §12 restent valables si on y remplace A par A^* et Λ par M; nous noterons Prop. 12.1* la proposition ainsi obtenue à partir de la Prop. 12.1.

Soit de nouveau m le maximum du degré de P.

Proposition 17.1 *Soit (H_r) une algèbre spectrale canonique sur K_p dans laquelle $H_2 = B \otimes \mathrm{M}P$.*

Si $p \neq 2$, et si H_∞ est triviale pour $D \leqq n$, $(n \geqq 2m + 1)$, alors $P^i = 0$(i pair).

Nous employerons sans mention particulière le fait bien connu suivant: Dans une algèbre différentielle canonique, anticommutative, sur un corps de caractéristique $\neq 2$, on a $b.db = 0$ quand b est de degré pair et de carré nul (en effet $2b.db = d(b.b) = 0$).

Pour obtenir la Prop. 17.1 je ne vois pas d'autre procédé que la construction de toute l'algèbre spectrale, par une méthode analogue à celle qui a permis d'établir le théorème 13.1.

Si $P^i = 0$ pour $i < m$, on a $d_r = 0 (2 \leqq r \leqq m)$, $H_{m+1} = H_2$; soit $x \in P^m$, $x \neq 0$, $d_{m+1}x \in B \otimes 1$, donc $x.dx = 0$ si et seulement si $dx = 0$; pour m pair, x est donc un d_{m+1}-cocycle et admet une image non nulle dans H_∞, ce qui contredit la trivialité de H_∞ pour $D \leqq n$ et démontre la Proposition quand P a un seul degré. Nous supposons dorénavant qu'il en a au moins deux, donc $n \geqq 2m + 1$. Il nous suffira de montrer que $A^*(m + 1, 2m + 1)$ est vrai, ce que nous ferons en suivant d'aussi près que possible la démonstration de $A(m + 1, 2m + 1)$ donnée dans les §14 et 15.

1-ère partie: Passage de $A^*(t, 2t + 1)$ à $A^*(t + 1, 2t + 1)$.

Nous supposons que $F = \mathrm{M}P$ possède une base

$$x_1, \cdots, x_s, x_{s+1}, \cdots, x_l \qquad (Dx_i < t \text{ si } i \leqq s,\ Dx_i \geqq t \text{ si } i > s).$$

formant un système simple de générateurs de carrés nuls et vérifiant $A^*(t, 2t + 1)$; la Prop. 12.1* (2_t) donne pour $k = 2t + 1$:

$$H_{t+1} = B_{t+1} \otimes \mathrm{M}P_t^* \qquad \text{pour } DB \leqq t + 1 \tag{17.1}$$

par conséquent $y_i = d_{t+1}\kappa_{t+1}^2(1 \otimes x_i)$, $(i > s)$, est dans $B_{t+1} \otimes \mathrm{M}P_t^*$ et comme

$DF(y_i) < DF(x_i)$, le produit $y_i \cdot \kappa_{t+1}^2(1 \otimes x_i)$ est nul si et seulement si $y_i = 0$. Il en résulte:

(17.2) *Si Dx_i est pair $(i > s)$, est automatiquement un d_{t+1}-cocycle.*

En particulier si t est pair, P^t est isomorphiquement appliqué dans H_∞, donc $P^t = 0$. D'autre part

$$d_{t+1}\kappa_{t+1}^2(1 \otimes P^t) = Q^{t+1} = B_{t+1}^{t+1}$$

vu la trivialité de H_∞ (cf début du §14), donc si t est pair, $y_i = 0$ pour tout $i > s$, et la base donnée vérifie déjà $A^*(t + 1, 2t + 1)$. Pour t impair, on établit comme dans le §14:

(17.3) *Q^{t+1} est sans relations pour $D \leqq 2t + 2$.*

La démonstration est à compléter sur un seul point: De $u \in 1 \otimes MP_*^t$ on conclut a priori $u \in 1 \otimes \wedge^2 P^t$ *ou bien* $u \in 1 \otimes P^{2t}$, mais la deuxième alternative est exclue d'après (17.2) car $d_{t+1}u = h \neq 0$; on retombe bien sur $u \in 1 \otimes \wedge^2 P^t$. Cela étant, on démontre par le raisonnement de la Prop. 14.1:

(17.4) *En ajoutant aux éléments de degrés impairs $>t$ de la base donnée des éléments décomposables, on peut obtenir une nouvelle base vérifiant $A^*(t + 1, 0)$*

Il faut bien remarquer que dans cette construction par récurrence on passe d'une base à la suivante en ne modifiant qu'un élément de degré impair; les bases intermédiaires et la base finale sont donc toujours formées d'éléments de carrés nuls constituant un système simple de générateurs.

On passera ensuite de $A^*(t + 1, 0)$ à $A^*(t + 1, 2t + 1)$ grâce à (17.3) et à $A^*(t, 2t + 1)$; enfin la validité de $A^*(2, 3)$ s'établit par des raisonnements analogues.

2ème partie: Passage de $A^*(t, 2t - 1)$ à $A^*(t, 2t + 1)$.

Ici nous aurons besoin d'un nouveau lemme.

LEMMA 17.1. *Si $A^*(t, 2t - 1)$ est vrai $(t \leqq m)$, $P^i = 0$ pour i pair $< 2t$.*

Si $P^j \neq 0$ pour j pair $<2t$, alors par hypothèse $j \geqq t$ et il existe $p \in 1 \otimes P^j$, $p \neq 0$, de carré nul, qui est un d_r-cocycle pour $r \leqq t$; par la trivialité de H_∞, il doit se trouver $q \in H_2$ et $s \geqq t + 1$ tels que

$$(17.5) \qquad \begin{aligned} &d_r\kappa_r^2 q = 0 && (r < s);\\ 0 \neq\ &\kappa_s^2 q = d_s\kappa_s^2 p && (Dq = j + 1 \leqq 2t - 1, DBq = s) \end{aligned}$$

$DFq = j + 1 - s \leqq 2t - 1 - s \leqq 2t - 1 - t - 1 \leqq t - 2$ donc

$$q \in B \otimes \wedge(P^1 + \cdots + P^{t-1}) \qquad \text{et } q \cdot p \neq 0.$$

Comme $p \cdot p = 0$, on a $\kappa_s^2(q \cdot p) = \kappa_s^2 q \cdot \kappa_s^2 p = 0$ et il doit exister $y \in H_2$ et $s' < s$ tels que

$$\begin{aligned} &d_r\kappa_r^2 y = 0 && (r < s');\\ &d_{s'}\kappa_{s'}^2 y = \kappa_{s'}^2(q \cdot p) \neq 0 && (DBy = DBq - s' = s - s') \end{aligned}$$

nous démontrerons plus bas que $s' \geqq t + 1$; admettons-le provisoirement dans ce cas, $DBy \leqq DBq - t - 1 \leqq 2t - 1 - t - 1 \leqq t - 2$ et d'après la Prop. 12.1*2_t

$$\kappa_{t+1}^2 y \in B_{t+1} \otimes \mathrm{M}P_*^t$$

mais $B_{t+1}^i = 0$ pour $i \leqq t$ (trivialité de H_∞), donc $DBy = 0$, et $s = s'$ ce qui est absurde et démontre le lemme.

Nous avons encore à prouver que $s' \geqq t + 1$; c'est évident si $DFq = 0$ car alors $\kappa_{t+1}^2 q \in B_{t+1}$ et comme $\kappa_{t+1}^2 q \neq 0$ d'après (17.5) on a

$$\kappa_{t+1}^2(q\cdot p) \in \kappa_{t+1}^2(B \otimes P_*^t) = B_{t+1} \otimes P_*^t \qquad (\text{pour } DB \leqq 2t - 1)$$

est aussi $\neq 0$; supposons donc que $DFq = i - 1 \neq 0$; alors $DBq \leqq 2t - 1 - (i - 1)$ et d'après la Prop. 12.1* (2_{i-1}):

$$\kappa_i^2 q \in B_i \otimes \mathrm{M}P_*^{i-1} \qquad \text{donc } \kappa_i^2 q \in B_i \otimes P^{i-1}$$

et $\kappa_{i+1}^2 q$ qui est $\neq 0$, est un élément non nul de $H(B_i \otimes \wedge P^{i-1})$, de degré extérieur 1. Comme

$$H(B_i \otimes \wedge P^{i-1}) \otimes \mathrm{M}P_*^i \subset H_{i+1} \qquad \text{pour } DB \leqq 2t - 1$$

(Prop. 12.1* 1_i), on voit que $\kappa_{i+1}^2(q\cdot p) \neq 0$ et que $\kappa_{i+1}^2 q \notin B_{i+1} \otimes \mathrm{M}P_*^i$.

Admettons maintenant avoir démontré que

$$(17.6) \qquad \kappa_r^2(q\cdot p) \notin \kappa_r^2(B \otimes \mathrm{M}P_*^{r-1}) \qquad \text{pour } i + 1 \leqq r \leqq \min\,(s', t).$$

Si $d_k\kappa_k^2 y = 0$ pour $k < r \leqq t$, alors $s' \geqq r$, $DBy \leqq 2t - 1 - r$ et

$$\kappa_r^2 y \in B_r \otimes \mathrm{M}P_*^{r-1}; \qquad d_r\kappa_r^2 y \in B_r \otimes \mathrm{M}P_*^{r-1}$$

$d_r\kappa_r^2 y$ ne peut donc être égal à $\kappa_r^2(q\cdot p)$ vu (17.6), c'est donc un d_r-cocycle d'après la définition même de y, donc $s' > r$ et par récurrence $s' \geqq t + 1$, ce que nous nous proposions de démontrer.

Pour terminer, il reste à démontrer (17.6), nous procédons par récurrence sur r; supposons (17.6) vrai pour $r = u - 1$, $(i + 1 \leqq u \leqq \min\,(s', t))$, s'il est faux pour u, cela signifie qu'il existe $x \in B \otimes \mathrm{M}P_*^{u-1}$ tel que

$$0 \neq \kappa_u^2(q\cdot p) = \kappa_u^2 x$$

de plus $DBx = DBq \leqq 2t - 1$, la prop. 12.1* (1_i) et le fait que $\kappa_{i+1}^2 q$ est de degré extérieur 1 dans $H(B_i \otimes \wedge P^{i-1})$ donnent

$$\kappa_{i+1}^2 x \in B_{i+1} \otimes \mathrm{M}P_*^i \text{ et } \kappa_{i+1}^2 x \neq \kappa_{i+1}^2(q\cdot p)$$

par conséquent on peut trouver $z \in H_2$ et un degré v, $(i + 1 \leqq v < u)$, tels que

$$d_r\kappa_r^2 z = 0 (r < v); \qquad d_v\kappa_v^2 z + \kappa_v^2 x = \kappa_v^2(q\cdot p); \qquad d_v\kappa_v^2 z \neq 0$$

mais $DB(z) = DBq - v \leqq 2t - 1 - v$ et d'après la Prop. 12.1* 2_{v-1} et 3_{v-1}:

$$\kappa_v^2 z,\ d_v^2\kappa_v^2 z \in \kappa_v^2(B \otimes \mathrm{M}P_*^{v-1})$$

comme on a déjà $\kappa_v^2 x \in \kappa_v^2(B \otimes \mathrm{M}P_*^{u-1}) \subset \kappa_v^2(B \otimes \mathrm{M}P_*^{v-1})$, $(v < u)$, on obtient alors

$$\kappa_v^2(q\cdot p) \in \kappa_v^2(B \otimes \mathrm{M}P_*^{v-1})$$

pour $v < u$, contrairement à l'hypothèse de minimum faite sur v. (17.6) est donc démontré.

Le lemme 17.1 étant obtenu, les énoncés et démonstrations des lemmes 15.1, 15.2 et de la prop. 15.1 subsistent si on y remplace A par A^* et $\wedge$ par M; la seule différence est qu'à la fin de la démonstration du lemme 15.2, pour parvenir à Dx impair à partir de $x \in 1 \leqq P_*^t$, il faut utiliser le lemme 17.1 et $Dx \leqq 2t - 1$ au lieu d'invoquer directement l'hypothèse $P^i = 0$ pour i pair.

Remarque. Soit $M = \dim P^1 + 2 \cdot \dim P^2 + \cdots + m \dim P^m$; dans [1], nous avons énoncé le Théorème 13.1 et la Proposition 17.1 pour $n \geqq M$, borne qui peut dans certains cas particuliers être inférieure à $2m + 1$. Sans chercher à voir si nos démonstrations s'étendent à ce cas, ce qui est sans intérêt pour la suite, nous montrerons ici comment les compléter pour obtenir le Théorème 2 de [1] quand $n < M$.

Nous supposons donc que (H_r) est l'algèbre spectrale sur K d'une fibration d'une sphère (homologique) dont nous notons ici la dimension par $n + 1$; on montre tout d'abord comme dans [1] que $B^k = 0$ si $k > n + 1 - M$. Admettons qu'il y ait au moins deux sphères en fibres, donc que $M \geqq m + 1$, et que $n < 2m + 1$; soit t tel que $2t + 3 > n \geqq 2t + 1$. Alors $B^k = 0$ pour $k > 2t + 3 - t - 2 = t + 1$, donc $H_{t+2} = H_\infty = G(H(S_{n+1}, K)) = H(S_{n+1}, K)$. D'autre part, $A(t + 1, 2t + 1)$ et $A^*(t + 1, 2t + 1)$, dont les démonstrations ne font intervenir que la trivialité de H_∞ jusqu'à $2t + 1$, restent valables et en particulier (Prop. 12.1 2_{t+1}):

$$H_{t+2} = B_{t+2} \otimes \wedge P_*^{t+1} \qquad (DB \leqq t)$$

ce qui est en contradiction avec l'égalité $H_{t+2} = H(S_{n+1}, K)$ et démontre le théorème 2 de [1] dans le cas particulier $n < 2m + 1$, le seul qu'il restait à considérer.

Chapitre V. La Transgression dans les Espaces Fibres Principaux

§18. Espaces universels et espaces classifiants

J'adopterai ici des définitions homologiques pour les notions d'espaces universels et de sous-algèbres caractéristiques, qui m'ont été suggérées par J. P. Serre; le point de vue homotopique ([9], [31]) sera rappelé plus bas. Ces définitions peuvent être utilisées grâce à la proposition suivante, qui n'est qu'un cas particulier du théorème de Vietoris-Begle sur les applications propres:[17]

Proposition 18.1. *Soit (E, B, F, p) un espace fibré connexe localement compact, à fibres compactes connexes.*

[17] Pour les espaces compacts, cf. E. G. Begle, Ann. of Math. **51** (1950), 534–543; pour les espaces localements compacts en cohomologie d'Alexander-Spanier: à supports compacts, A. Borel, Jour. Math. pur. appl. IXs. **29** (1950), 313–322, Théorème 5. a, ou [5] Exp. VII Théorème 3, à supports fermés quelconques [10] Exp. XXI, Prop. 5. Pour les espaces fibrés (au sens de Serre), à base et fibre connexes par arcs, en cohomologio singulière, *voir* [29], p. 470; si E est localement connexe, la Prop. 18.1 elle-même résulte trivialement du §4a, b (en cohomologie d'Alexander-Spanier à supports compacts).

Si $H^i(F, M) = 0$ pour $0 < i \leqq n$, p^* est un isomorphisme de $H^i(B, M)$ sur $H^i(E, M)$ pour $0 \leqq i \leqq n$.

DEFINITION 18.1. *On appelle espace universel pour le groupe de Lie compact G et pour la dimension n un espace fibré principal, que nous noterons $E(n, G)$, de fibre G, compact connexe et localement connexe dont la cohomologie (d'Alexander-Spanier à coefficients quelconques) est triviale jusqu'à n.*

La base $B(n, G)$ d'un tel espace est dite espace classifiant pour G et pour la dimension n.

Nous désignerons aussi quelquefois ces espaces par E_G et B_G lorsque n, simplement supposé assez grand, ne joue pas de rôle particulier. Rappelons que des espaces universels existent pour tout G et pour tout n; en effet, si U est un sous-groupe fermé de G, $E(n, G)$ est évidemment universel pour U et pour n; comme tout groupe admet une représentation linéaire fidèle dans un groupe $\mathbf{SO}(k)$, il suffit d'établir cette existence pour ces derniers, on prend alors les variétés de Stiefel (cf. Prop. 10.1 et 10.4).

EXEMPLES. On peut prendre pour $E(n, \mathbf{O}(k))$ et $E(n, \mathbf{SO}(k))$ la variété de Stiefel $V_{n+k+1,k}B(n, \mathbf{O}(k))$ et $B(n, \mathbf{SO}(k))$ sont alors les grassmanniennes des k-plans (resp. des k-plans orientés) de R^{n+k+1} passant par l'origine.

De manière analogue on peut prendre pour $E(2n, \mathbf{U}(k))$ et $E(4n, \mathbf{Sp}(k))$ les variétés de Stiefel $\mathbf{W}_{n+k,k}$ et $\mathbf{X}_{n+k,k}$; les espaces classifiants sont alors les grassmanniennes des k-plans de C^{n+k} et K^{n+k} passant par l'origine.

Nous dirons que deux algèbres graduées H et H' *sont isomorphes jusqu'à* n (ou pour $D \leqq n$), s'il existe un isomorphisme de H^i sur H'^i $(i \leqq n)$ compatible avec le produit d'éléments homogènes dont la somme des degrés est $\leqq n$.

PROPOSITION 18.2. *Les algèbres de cohomologie de deux espaces classifiants pour G et pour des dimensions $\geqq n$ sont canoniquement isomorphes jusqu'à n.*

Désignons par E_1, E_2 deux espaces universels pour G et pour des dimensions $\geqq n$, par B_1 et B_2 leurs bases et formons le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} E_2 & \xleftarrow{\bar f^2} & E_1 \times E_2 & \xrightarrow{\bar f_1} & E_1 \\ \downarrow{\scriptstyle p^2} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p_1} \\ B_2 & \xleftarrow{f_2} & (E_1, E_2)_G & \xrightarrow{f_1} & B_1 \end{array} \tag{18.1}$$

On envisage bien entendu $E_1 \times E_2$ comme espace fibré principal de groupe G en y faisant opérer G par: $(e_1 \times e_2)g = e_1 \cdot g \times e_2 \cdot g$ et p est la projection de $E_1 \times E_2$ sur sa base; $\bar f_1$ et $\bar f_2$ désignent les projections $e_1 \times e_2 \to e_1$ et $e_1 \times e_2 \to e_2$, ce sont des homomorphismes d'espaces fibrés principaux, f_1 et f_2 sont les applications obtenues par passage au quotient; il est clair que f_1, (resp. f_2), fait de $X = (E_1, E_2)_G$ un espace fibré (X, B_1, E_2, f_1), (resp. (X, B_2, E_1, f_2)). D'après le théorème de Vietoris, f_j^* est un isomorphisme de $H^i(B_j, M)$ sur $H^i(X, M)$, $(j = 1, 2; 0 \leqq i \leqq n)$, d'où un isomorphisme pour $D \leqq n$ $f_{12}^* = f_1^{*^{-1}} \circ f_2^*$ de $H(B_2, M)$ sur $H(B_1, M)$.

Cet isomorphisme est canonique dans le sens suivant: Si E_3 est un troisième espace universel pour une dimension $\geqq n$ et B_3 sa base, alors $f_{13}^* = f_{12}^* \circ f_{23}^*$; pour le voir on passe par l'intermédiaire de $E_1 \times E_2 \times E_3$, dont le quotient par la relation d'équivalence $e_1 \times e_2 \times e_3 \approx e_1 \cdot g \times e_2 \cdot g \times e_3 \cdot g$ sera noté Y. Le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} E_i & \xleftarrow{\bar{g}_i} & E_1 \times E_2 \times E_3 & \xrightarrow{\bar{g}_j} & E_j \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B_i & \xleftarrow{g_i} & Y & \xrightarrow{g_j} & B_j \end{array} \tag{18.2}$$

où $\bar{g}_i$ et $\bar{g}_j$ sont des projections donne de nouveau un isomorphisme $g_{ij}^* = g_i^{*-1} \circ g_j^*$ de $H(B_j, M)$ sur $H(B_i, M)$ et il est clair que $g_{13}^* = g_{12}^* \circ g_{23}^*$. On peut former en outre le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} E_2 & \xleftarrow{\bar{f}_2} & E_1 \times E_2 & \xleftarrow{\bar{h}_3} & E_1 \times E_2 \times E_3 & \xrightarrow{\bar{g}_1} & E_1 \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ B_2 & \xleftarrow{f_2} & (E_1, E_2)_G & \xleftarrow{h_3} & Y & \xrightarrow{g_1} & B_1 \end{array} \tag{18.3}$$

$\bar{h}_3$ est la projection et toujours par Vietoris on voit que h_3^* est un isomorphisme sur pour $i \leqq n$. On a $g_2 = f_2 \circ h_3$, $g_1 = f_1 \circ h_3$ d'où

$$g_{12}^* = g_1^{*^{-1}} \circ g_2^* = f_1^{*^{-1}} \circ h_3^{*^{-1}} \circ h_3^* \circ f_2^* = f_1^{*^{-1}} \circ f_2^* = f_{12}^*$$

de même on voit que $g_{ij}^* = f_{ij}^*$, d'où $f_{13}^* = f_{12}^* \circ f_{23}^*$.

La Prop. 18.2 légitime la définition suivante:

DEFINITION 18.2. *$H(B_G, M)$ est l'algèbre graduée qui pour tout n est isomorphe jusqu'à n à $H(B(n, G), M)$, où $B(n, G)$ est un espace classifiant pour G et pour la dimension n quelconque.*

Cette algèbre jouera en somme le rôle d'une algèbre de cohomologie d'un espace classifiant pour G et pour toute dimension, bien qu'un tel espace ne puisse être compact (On verra en effet dans le §19 que $H(B_G, R)$ contient des éléments non nilpotents).

$H(B_G, M)$ est complètement déterminé par G, il se pose le problème d'établir des relations entre $H(G, M)$ et $H(B_G, M)$; dans le §19 nous indiquerons quelques cas où la connaissance de $H(G, M)$ permet de donner $H(B_G, M)$ explicitement.

Soit (E, B, G, p) un espace fibré principal connexe, localement compact; nous formons le diagramme[18]

$$\begin{array}{ccccc} E & \xleftarrow{\bar{g}} & E(n, G) \times E & \xrightarrow{\bar{f}} & E(n, G) \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p''} \\ B & \xleftarrow{g} & (E(n, G), E)_G & \xrightarrow{f} & B(n, G) \end{array} \tag{18.4}$$

[18] C'est ce diagramme qui m'a été indiqué par J. P. Serre et qui a permis ici l'adoption d'un point de vue purement homologique.

$\bar{g}$ et $\bar{f}$ sont les projections, g fait de $X = (E(n, G), E)_G$ un espace fibré $(X, B, E(n, G), g)$, donc g^* est un isomorphisme sur pour $D \leqq n$, d'où un homomorphisme $g^{*-1}f^*: H(B(n, G), M) \to H(B, M)$ pour $D \leqq n$; cet homomorphisme est indépendant de l'espace universel dans le sens suivant: Si $E'(n, G)$ est un deuxième espace universel et si $h^*: H(B'(n, G), M) \to H(B(n, G), M)$ est l'isomorphisme (jusqu'à n) de la Prop. 18.2, alors $g^{*^{-1}} \circ f^* \circ h^*$ est l'homomorphisme $H(B'(n, G), M) \to H(B, M)$ que définit le diagramme (18.4) si on y remplace $E(n, G)$ par $E'(n, G)$. On le voit en utilisant l'espace $E(n, G) \times E'(n, G) \times E$ par un raisonnement tout à fait analogue à celui qui termine la démonstration de la Prop. 18.2 et que nous ne reproduirons pas; cela permet de poser la:

Definition 18.3. *Soit (E, B, G, p) un espace fibré principal connexe localement compact, de groupe de Lie compact G. On appelle homomorphisme caractéristique de cette fibration (relativement aux coefficients M) l'homomorphisme $\sigma^*: H(B_G, M) \to H(B, M)$ qui pour tout n coïncide jusqu'à n avec l'homomorphisme $H(B(n, G), M) \to H(B, M)$ déduit du diagramme* (18.4). *L'image de σ^* est la sous-algèbre caractéristique de la fibration.*

Remarque. Dans la suite nous utiliserons cette notion presque uniquement pour des espaces compacts. Si E n'est pas compact, il faut se placer en cohomologie d'Alexander-Spanier à supports fermés quelconques (donc utiliser ci-dessus le théorème de Vietoris-Begle généralisé de [10], Exp. XXI).

Proposition 18.3. *Soit $h: (E, B, G, p) \to (E', B', G, p')$ un homomorphisme d'espaces fibrés principaux, σ^* et σ'^* les homomorphismes caractéristiques de ces fibrations.*

Alors $\sigma^* = h^* \circ \sigma'^*$

A l'aide de h on établit un homomorphisme évident du diagramme (18.4) dans le diagramme correspondant formé pour E'; en considérant les deux lignes inférieures, on obtient un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} & (E(n, G), E)_G \arrow[dl, "f"'] \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & B \arrow[d, "h"] \\ B(n, G) & & \\ & (E(n, G), E') \arrow[ul, "f'"] \arrow[r, "g'"] & B' \end{tikzcd}$$

d'où l'on déduit que

$$\sigma^* = g^{*-1} \circ f^* = g^{*-1} \circ h^* \circ f'^* = h^* \circ (g'^*)^{-1} \circ f'^* = h^* \circ \sigma'^*.$$

Une conséquence souvent utile est le:

Corollaire. *Soit (E, B, G, p) un espace fibré principal connexe localement compact, U un sous-groupe fermé de G.*

Si l'homomorphisme caractéristique σ'^* de $(G, G/U, U, q)$ relativement à M est sur, G/U est totalement non homologue à zéro relativement à M dans $(E/U, B, G/U, q)$.

On peut développer des considérations analogues pour les espaces fibrés à groupe structural de Lie compact G donné (comme groupe d'homéomorphismes de la fibre); un tel espace est de la forme $(E, F)_G$ où E est principal de fibre G ([9] Exp. VI, [31], Nos. 8.7, 8.12). Les espaces universels seront alors par définition les espaces $(E(n, G), F)_G$. Si E_1 et E_2 sont deux espaces universels pour G et pour n, on formera le diagramme commutatif suivant, où $\hat{f}_1$ et $\hat{f}_2$ sont les projections canoniques:

$$\begin{tikzcd}
E_2 \times F \arrow[d] & E_1 \times E_2 \times F \arrow[l, "\hat{f}_2"'] \arrow[r, "\hat{f}_1"] \arrow[d] & E_1 \times F \arrow[d] \\
(E_2, F)_G \arrow[d, "p_2"'] & (E_1 \times E_2, F)_G \arrow[l, "\tilde{f}_2"'] \arrow[r, "\tilde{f}_1"] \arrow[d] & (E_1, F)_G \arrow[d, "p_1"] \\
B_2 & (E_1, E_2)_G \arrow[l, "f_2"'] \arrow[r, "f_1"] & B_1
\end{tikzcd} \tag{18.5}$$

Il est immédiat que f_1 et f_2 sont les mêmes applications que dans (18.1); par Vietoris on montre que (18.5) définit un isomorphisme $\tilde{f}_{12}^* = \tilde{f}_1^{*^{-1}} \circ \tilde{f}_2^*$ de $H((E_2, F)_G, M)$ sur $H((E_1, F)_G, M)$ pour $D \leqq n$ tel que $p_1^* \circ f_{12}^* = \tilde{f}_{12}^* \circ p_2^*$; comme f_{12}^* cet isomorphisme est canonique et permet d'introduire une algèbre $H((E_G, F)_G, M)$, qui pour tout n est isomorphe jusqu'à n *à* $H((E(n, G), F)_G, M)$, et un homomorphisme

$$p_G^*: H(B_G, M) \rightarrow H((E_G, F)_G, M)$$

qui pour tout n, coïncide avec l'homomorphisme

$$p^*: H(B(n, G), M) \rightarrow H((E(n, G), F)_G, M) \qquad (\text{pour } D \leqq n).$$

Si maintenant $((E, F)_G, B, F, p)$ est un espace fibré connexe localement compact on formera un diagramme analogue à (18.5), où $E_1, B_1, p_1, \hat{f}_1, \tilde{f}_1, f_1$ sont remplacés par $E, B, p, \hat{g}, \tilde{g}, g$; il donne un homomorphisme canonique $\tilde{g}^{*^{-1}} \circ \tilde{f}_2^*$: $H((E_2, F)_G, M) \rightarrow H((E, F)_G, M)$ pour $D \leqq n$ tel que $p^* \circ g^{*^{-1}} \circ f_2^* = \tilde{g}^{*^{-1}} \circ \tilde{f}_2^* \circ p_2^*$; finalement on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H((E_G, F)_G, M) \arrow[r, "\bar{\sigma}^*"] & H((E, F)_G, M) \\
H(B_G, M) \arrow[u, "p_G^*"] \arrow[r, "\sigma^*"] & H(B, M) \arrow[u, "p^*"']
\end{tikzcd} \tag{18.6}$$

où σ^* est l'homomorphisme caractéristique de la définition 18.3.

Remarque. En s'appuyant sur les résultats de Serre [29] on peut aussi dans tout ce qui précède se placer en cohomologie singulière; un espace universel pour G et pour n est alors un espace fibré principal connexe par arcs à cohomologie singulière triviale pour $D \leqq n$. (On peut donc aussi prendre les variétés de Stiefel), mais un tel espace ne doit pas être forcément supposé compact. A l'aide du théorème de [29] cité dans[17] on démontre comme ci-dessus la Prop. 18.2 et on introduit une sous-algèbre caractéristique pour des espaces fibrés principaux connexes par arcs quelconques, et un couple de sous-algèbres caractéristiques comme dans (18.6) pour les espaces $(E, F)_G$. Aucune hypothèse de compacité locale n'est à faire.

Le point de vue homotopique. On appelle espace universel pour G et pour n un espace $E(n, G)$ fibré principal de fibre G, connexe par arcs et dont les groupes d'homotopie $\pi_i(E(n, G))$ sont nuls pour $i \leqq n$, (cf [9], Exp. VIII, [31] No. 19), on peut donc encore prendre les variétés de Stiefel. Le nom d'espace classifiant donné à la base $B(n, G)$ d'un espace universel est justifié par le théorème de classification suivant (voir [31], No. 19, si B est un polyèdre fini, [9] Exp. VIII sous les hypothèses formulées ici, mais on exige alors que $E(n, G)$ soit un polyèdre fini):

Soit B un espace localement compact, paracompact, de dimension finie, G un groupe de Lie compact. Alors les structures d'espaces fibrés principaux (E, B, G, p) de base B sont en correspondance biunivoque avec les classes d'applications continues de B dans $B(n, G)$, ($n \geqq$ dim. B), et la structure qui correspond à $f: B \rightarrow B(n, G)$ est l'image réciproque de $E(n, G)$ pour cette application.

$h^*: H(B(n, G), M) \rightarrow H(B, M)$, (cohomologie singulière ou d'Alexander-Spanier à supports quelconques) est l'homomorphisme caractéristique de la fibration, son image est la sous-algèbre caractéristique; nous voulons montrer que l'on retrouve ainsi l'homomorphisme et la sous-algèbre caractéristiques au sens de la définition 18.3, pour autant bien entendu que l'on prenne des espaces universels dans les sens homologiques et homotopiques (variétés de Stiefel).

PROPOSITION 18.4. *Soit $\bar{h}: E \rightarrow E(n, G)$ un homomorphisme d'espaces fibrés principaux, $h: B \rightarrow B(n, G)$ l'application correspondante. Alors h^* coïncide jusqu'à n avec l'homomorphisme σ^* de la définition* 18.3.

Soit $\bar{\zeta}: E \rightarrow E \times E(n, G)$ l'homomorphisme défini par $\bar{\zeta}(e) = (e, h(e))$, $\zeta: B \rightarrow (E, E(n, G))_G$ l'application correspondante; on a en reprenant les notations du diagramme 18.4:

$$h = f \circ \zeta; \quad g \circ \zeta = id.$$

donc

$$h^* = \zeta^* \circ f^* = g^{*^{-1}} \circ f^* = \sigma^* \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Rappelons que l'on déduit du théorème de classification un résultat semblable pour les espaces $(E, F)_G$ à fibre F et groupe structural G donné: Ceux qui ont B comme base sont en correspondance biunivoque avec les classes d'applications de B dans $B(n, G)$, l'espace correspondant à une telle application étant l'image réciproque de $((E(n, G), F)_G$ par cette application ([9], Exp. VIII). A $((E, F)_G, B, F, p)$ correspond alors un couple d'homomorphismes caractéristiques et on montre aussi, comme précédemment, que c'est le couple σ^*, $\bar{\sigma}^*$ de (18.6).

§19. La cohomologie des espaces classifiants et la transgression

DEFINITION. *Soit G de Lie compact connexe; $x \in H(G, M)$ est universellement transgressif (relativement à M) s'il existe des espaces universels pour G et pour des dimensions arbitrairement grandes dans lesquels il est transgressif.*

PROPOSITION 19.1. *Si $h \in H(G, A)$ est universellement transgressif, il est transgressif dans tout espace fibré principal (E, B, G, p) compact connexe, localement connexe.*

Nous reprenons le diagramme (18.4), $E(n, G)$ y désignant un espace universel pour n assez grand, disons $n \geqq 3s$, $(s = \dim. G)$ dans lequel x est transgressif; soient (H'_r), (H'_r), (H''_r) les algèbres spectrales sur A de p, p', p''; comme il s'agit d'espaces fibrés principaux à fibre compacte connexe G, on a dans H_2, H'_2, H''_2 des coefficients ordinaires (§4ii).

$\bar{f}^*$ induit un homomorphisme de (H''_r) dans (H'_r), donc x qui est transgressif dans (H''_r), l'est aussi dans (H'_r); $\bar{g}$ est naturellement un isomorphisme pour la cohomologie de la fibre, et par Vietoris g^* est un isomorphisme pour $D \leqq n$, par conséquent $\bar{g}^*$ est un isomorphisme de (H_r) sur (H'_r) pour les éléments de degré $\leqq n - s$, (cf §4d), donc ici en particulier pour les éléments de $D \leqq s$, et ainsi x est aussi transgressif dans (H_r).

REMARQUES (1). Cette proposition montre qu'un élément est universellement transgressif s'il est transgressif dans *un* espace universel $E(n, G)$ pour n assez grand.

(2) On peut naturellement indiquer d'autres espaces dans lesquels un élément universellement transgressif est transgressif, en utilisant par exemple en cohomologie d'Alexander-Spanier à supports quelconques l'algèbre spectrale de H. Cartan ([10] Exp. XXI), ou en cohomologie singulière l'algèbre spectrale de Serre. Du point de vue du théorème de classification, on peut remarquer que si $h:E \to E'$ est un homomorphisme d'espaces fibrés principaux, et si x est transgressif dans E', il l'est dans E, car l'image inverse d'une cochaîne de transgression pour x dans E' est cochaîne de transgression pour x dans E; donc si x est universellement transgressif, il est transgressif dans tout espace fibré principal pour lequel le théorème de classification est valable, (et cela aussi bien en cohomologie singulière qu'en cohomologie d'Alexander-Spanier à supports quelconques).

Si F admet G comme groupe d'homéomorphismes, on dira que $x \in H(F, M)$ est universellement transgressif s'il est transgressif dans des espaces $(E(n, G), F)_G$, n arbitrairement grand; il le sera alors dans tout espace $(E, F)_G$ pour lequel le théorème de classification est valable, ou aussi, si $M = A$, F compact, connexe, localement connexe, dans tout espace $(E, F)_G$ où E est compact, connexe localement connexe (démonstration semblable à celle de la Prop. 19.1).

THEOREME 19.1. *Soit G de Lie compact connexe; supposons que $H(G, K_p)$, (resp. $H(G, Z)$), soit l'algèbre extérieure d'un espace vectoriel, (resp. d'un groupe abélien libre), avant une base formée de l éléments de degrés impairs $r_1, \cdots, r_l$. Alors*

(a) *$H(G, K_p)$, (resp. $H(G, Z)$), a un système $x_1, \cdots, x_l$ $(Dx_i = r_i)$ de générateurs universellement transgressifs; tous les éléments universellement transgressifs de $H(G, K_p)$, (resp. $H(G, Z)$), sont combinaisons linéaires x_i.*

(b) *$H(B_G, K_p)$, (resp. $H(B_G, Z)$), est isomorphe à une algèbre de polynômes $K_p[y_1, \cdots, y_l]$, (resp. $Z[y_1, \cdots, y_l]$). Dans un espace $E(n, G)$ y_i est la classe de cohomologie du cobord d'une cochaîne de transgression pour x_i.*

Si $H(G,K_p)$ vérifie notre hypothèse, c'est l'algèbre extérieure d'un sous-espace P univoquement déterminé d'éléments transgressifs dans un espace universel $E(n, G)$, ($n \geqq$ dim. G), d'après le Théorème 13.1; les éléments de P sont alors transgressifs dans tout espace universel (Prop. 19.1); pour obtenir (b) il suffit d'appliquer le théorème 13.1 (b) à des espaces $E(n, G)$ où n est arbitrairement grand.

Si $H(G, Z)$ est l'algèbre extérieure d'un groupe abélien libre de base $x_1, \cdots, x_l$, $H(G, K_p) = H(G, Z) \otimes K_p$ est l'algèbre extérieure engendrée par $x_1 \otimes 1, \cdots, x_l \otimes 1$; et $H(B_G, K_p) = K_p[y_1, \cdots, y_l]$ ($Dy_i = Dx_i + 1$). Je prétends tout d'abord que $H(B_G, Z) = Z[y_1, \cdots, y_l]$ ou, ce qui revient au même, que $H(B(n, G), Z) = Z[y_1, \cdots, y_l]$ pour $D \leqq n$; en effet $H^i(E(n, G), Z)$ et $H^i(G, Z)$ ont un nombre fini de générateurs ($i \leqq n$), et à l'aide de l'algèbre spectrale sur Z de $E(n, G)$ on démontre facilement par récurrence sur $i \leqq n$ que $H^i(B(n, G), Z)$ a un nombre fini de générateurs; comme la dimension de $H^i(B(n, G), K_p)$ est indépendante de p, on en conclut que ce groupe est sans torsion et que $H(B(n, G), Z)$ est au moins additivement isomorphe à $Z[y_1, \cdots, y_l]$ pour $D \leqq n$; l'isomorphie multiplicative s'établit par un raisonnement analogue à celui de la Prop. 7.3.

Notre théorème étant vrai pour les coefficients rationnels Z_0, $H(G, Z)$ est l'algèbre extérieure d'un groupe abélien libre P ayant une base $x_1, \cdots, x_l$ formée d'éléments "rationnellement transgressifs", il existe donc un entier $m_i > 0$ tel que $m_i x_i$ soit transgressif; l'image canonique de P dans $H(G, Z_0)$ est l'espace des éléments universellement transgressifs, donc P est bien déterminé. On peut aussi admettre que $y_1, \cdots, y_l$ est un système de générateurs de $H(B(n, G), Z)$ tel que $n_i y_i$ (n_i entier positif) soit une image de $m_i x_i$ par transgression. Nous devons montrer que $n_i = m_i = 1$ ($i = 1, \cdots, l$), autrement dit que dans l'algèbre spectrale (H_r) sur Z de $E(n, G)$ on a:

$$(19.1) \qquad d_r \kappa_r^2(1 \otimes x_i) = 0 \qquad (r \leqq Dx_i);$$

$$\kappa_r^2(y_i \otimes 1) = d_r \kappa_r^2(1 \otimes x_i), \qquad (r = Dy_i)$$

par hypothèse

$$(19.2) \qquad d_r \kappa_r^2(1 \otimes m_i x_i) = 0 \qquad (r \leqq Dx_i)$$

ce qui montre qu'en tout cas si $\kappa_r^2(1 \otimes x_i)$ est défini on a

$$d_r \kappa_r^2(1 \otimes x_i) \subset \text{Tors. } H_r \qquad (r \leqq Dx_i)$$

(19.1) est vrai pour $r = 2$; en effet d_2 est un isomorphisme de $H^1(G, Z) = H_2^{0,1}$ sur $H^2(B(n, G), Z) = H_2^{2,0}$ vu la trivialité de H_∞ et il est nul sur x_i si $Dx_i > 1$ car Tors. $H_2 = 0$ pour $DB \leqq n$. Supposons (19.1) démontré pour $r < t$, soit $Dx_i < t$ pour $i < a$, $Dx_i = t$ pour $a \leqq i < b$, $Dx_i > t$ pour $i \geqq b$, P^t l'espace sous-tendu par $x_a, \cdots, x_{b-1}$, P_*^t l'espace de $x_a, \cdots, x_l$. Les éléments $y_1, \cdots, y_l$ sont évidemment sans relations pour $DB \leqq n$, la Prop. 12.1 donne

$$H_{t+1} \cong Z[y_a, \cdots, y_l] \otimes \Lambda P_*^t \qquad \text{pour } DB \leqq n - t$$

et H_{t+1} est ainsi sans torsion pour $DB \leqq n - t$; d_{t+1} est donc nul sur x_i si $Dx_i > t$, c'est de plus un isomorphisme de $P^t = H_{t+1}^{0,t}$ sur $H_{t+1}^{t+1,0}$ (qui est l'ensemble des éléments de degré $t + 1$ de $Z[y_a, \cdots, y_l]$), vu la trivialité de H_∞, ce qui démontre (19.1) pour $r = t + 1$.

REMARQUE. Rappelons que l'hypothèse du théorème 19.1 est vraie si G est sans p-torsion (resp. sans torsion), d'après les Prop. 7.2 et 7.3.

Exemples. On a vu au §9 que

$$H(\mathbf{U}(m), Z) = H(\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_3 \times \cdots \times \mathbf{S}_{2m-1}, Z)$$

$$H(\mathbf{Sp}(m), Z) = H(\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_7 \times \cdots \times S_{4m-1}, Z)$$

le théorème 19.1 s'applique pour les coefficients entiers. Les algèbres $H(B(n, \mathbf{U}(m), Z)$ et $H(B(n, \mathbf{Sp}(m), Z)$ sont jusqu'à n des algèbres de polynômes à coefficients entiers à m variables de degrés $2, 4, \cdots, 2m$, resp. $4, 8, \cdots, 4m$; on retrouve pour les grassmanniennes complexes un théorème de S. S. Chern [12], et un résultat analogue pour les grassmanniennes quaternioniennes.

Dans ces deux cas particuliers, l'existence du système de générateurs universellement transgressifs peut aussi s'établir indépendamment du théorème 13.1, par un raisonnement qui sera exposé plus loin à propos des groupes orthogonaux; il montre aussi que $H(\mathbf{W}_{n,q}, Z)$ et $H(\mathbf{X}_{n,q}, Z)$ ont un système de générateurs universellement transgressifs, $\mathbf{W}_{n,q}$ et $\mathbf{X}_{n,q}$ étant bien entendu envisagés comme munis des groupes d'homéomorphismes définis par les fibrations $\mathbf{W}_{n,q} = \mathbf{U}(n)/\mathbf{U}(n - q)$, $\mathbf{X}_{n,q} = \mathbf{Sp}(n)/\mathbf{Sp}(n - q)$.

Signalons enfin une conséquence de la Prop. 16.1:

PROPOSITION 19.2. *Si $H(G, K_2)$ possède un système simple de générateurs universellement transgressifs, $x_1, \cdots, x_l$, alors $H(G, K_2) = K_2[y_1, \cdots, y_l]$, $(Dy_i = Dx_i + 1)$; y_i est la classe de cohomologie du cobord d'une cochaîne de transgression pour x_i dans $E(n, G)$.*

§20. Eléments universellement transgressifs et éléments primitifs

Voulant rester en cohomologie, nous appellerons ici primitif de $H(G, K_p)$ un élément x dont l'image dans $H(G, K_p) \otimes H(G, K_p)$ par le transposé f^* de l'application $f: G \times G \to G$ définie par le produit est:

$$f^*(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x. \tag{20.1}$$

En caractéristique zéro, cela équivaut à dire que x est orthogonal aux éléments décomposables de l'algèbre d'homologie (produit de Pontrjagin), ([21], Lemme 10.1). Le théorème de transgression de Cartan-Chevalley-Weil assure que les primitifs de $H(G, R)$ sont les éléments transgressifs dans les espaces fibrés principaux différentiables; nous voulons ici démontrer un résultat analogue en caractéristique quelconque.

Par analogie avec la définition (6.4), nous dirons que $H(X, Z)$ a un système simple de générateurs $x_1, \cdots, x_m$ si elle est sans torsion et si les monômes $x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ $(i_1 < \cdots < i_k; k = 1, \cdots, m)$ forment avec l'élément neutre une base de groupe abélien de $H(X, Z)$.

Remarquons encore que si la variété de Hopf X est sans torsion, on a

$H(X \times X, Z) = H(X, Z) \otimes H(X, Z)$, la formule (20.1) a un sens et définit les primitifs de la cohomologie entière.

DEFINITION. *L'espace X vérifie $(T)_A$ si $H(X, A)$ est sans torsion*[19] *et possède un système simple de générateurs universellement transgressifs.*

La variété de Hopf X vérifie $(P)_A$ si $H(X, A)$ est sans torsion[19] *et possède un système simple de générateurs primitifs.*

Notations. On écrira aussi $(T)_p$, $(P)_p$ quand $A = K_p$, (T), (P) si $A = Z$.

Soit (E, B, G, p) un espace fibré principal, (H_r) son algèbre spectrale sur A; notons q la projection $(e, g) \to p(e)$ de $E \times G$ sur B, que l'on envisage ainsi comme un espace fibré principal $(E \times G, B, G \times G, q)$ de groupe $G \times G$, et soit (H'_r) son algèbre spectrale.

LEMME 20.1. *Si $H(G, A)$ est sans torsion, $H'_r = H_r \otimes H(G, A)$, la différentielle d'_r de H'_r est égale à d_r sur H_r, nulle sur $H(G, A)$.*

On a en tout cas

$$H'_2 = H(B, A) \otimes H(G \times G, A) = H(B, A) \otimes H(G, A) \otimes H(G, A).$$

Si l'on identifie $H(G \times G, A)$ à l'algèbre de cohomologie d'une fibre $q^{-1}(b)$, on peut supposer que le premier facteur $H(G, A)$ correspond à $(p^{-1}(b), g_0)$ où g_0 est un élément fixe de G et que le deuxième correspond à (u, G), $(u \in p^{-1}(b))$; ce dernier est formé de d_r-cocycles $(r > 2)$ puisque (u, G) est totalement non homologue à zéro, (cf §4c). Formons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} E & \xleftarrow{\alpha} & E \times G & \xleftarrow{\beta} & E \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B & \xleftrightarrow{id.} & B & \xleftrightarrow{id.} & B \end{array}$$

α est la projection $(e, g) \to e$, β est l'injection $e \to (e, g_0)$; α^*, resp. β^* est un homomorphisme de (H_r) dans (H'_r), resp. de (H'_r) dans (H_r) et $\beta^* \circ \alpha^*$ est l'identité puisque $\alpha \circ \beta = id.$, donc α^* est biunivoque; on a $H_2 = H(B, A) \otimes H(G, A)$; d'après le §4d, α^* est l'identité sur $H(B, A) \otimes 1$; sur $1 \otimes H(G, A)$ il est défini par l'homomorphisme $H(G, A) \to H(G \times G, A)$ transposé de la restriction à une fibre de α c'est donc un isomorphisme de $H(G, A) \otimes 1$ sur $1 \otimes H(G, A) \otimes 1$; ainsi

$$H'_2 = \alpha^*(H_2) \otimes H(G, A) \cong H_2 \otimes H(G, A)$$

et d'_2 coincide avec d_2 sur H_2, est nulle sur $H(G, A)$; comme $H(G, A)$ est libre, notre lemme en résulte facilement par récurrence sur r.

PROPOSITION 20.1. *Si $H(G, A)$ est sans torsion et si $x \in H(G, A)$ est universellement transgressif, il est primitif.*

Soit E_G universel pour G et pour n assez grand, dans lequel x est transgressif;

[19] Si $A = K_p$ cette hypothèse est toujours réalisée et ne doit pas être confondue avec $H(G, Z)$ sans p-torsion.

G opère sur E_G d'où une application $h: E_G \times G \to E_G$, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E_G \times G & \xrightarrow{h} & E_G \\ q \Big\downarrow & & \Big\downarrow p \\ B_G & \xleftrightarrow{id.} & B_G \end{array} \tag{20.1}$$

et un homomorphisme de l'algèbre spectrale (H_r) de p dans l'algèbre spectrale (H'_r) de q; en particulier $h^*: H_2 \to H'_2$ est l'identité sur $H(B_G, A)$, le transposé de la restriction de h à une fibre sur $H(G, A)$, c'est à dire le transposé f^*: $H(G, A) \to H(G \times G, A)$ de l'application définie par le produit. Par conséquent, pour $h^*: H_2 \to H'_2$:

$$h^*(x) = 1 \otimes f^*(x) = 1 \otimes (x \otimes 1 + 1 \otimes x + u_1 \otimes v_1 + \cdots + u_s \otimes v_s)$$

où $0 < Du_j < Dx$ $(j = 1, \cdots, s)$. D'après le lemme 20.1, v_j est un d'_r-cocycle pour tout r, et u_j s'identifie à un élément de (H_r); $h^*(x)$ est transgressif puisque x l'est, c'est donc un d'_r-cocycle pour $r \leqq Dx$, et si l'on admet, ce qui est loisible, que les v_i sont linéairement indépendants, cela entraîne que u_i est un d_r-cocycle pour $r \leqq Dx$, donc pour tout r vu $Du_i < Dx$; mais ce n'est pas un d_r-cobord puisque $DBu_i = 0$, et s'il est différent de zéro, il admet une image non nulle dans l'algèbre terminale de (H_r), qui cependant est triviale; ainsi, $u_i = 0$ $(i = 1, \cdots, s)$, x est primitif.

Proposition 20.2. *Si $H(G, A)$ vérifie $(T)_A$, il vérifie $(P)_A$; les éléments universellement transgressifs et les éléments primitifs coïncident.*

Les éléments universellement transgressifs de $H(G, A)$ sont tous combinaisons linéaires des générateurs donnés (Théorème 19.1, Prop. 6.1 et 19.1), et ils sont primitifs d'après la Prop. 20.1; cela détermine complètement l'homomorphisme f^* et on voit aisément qu'un élément décomposable n'est jamais primitif, ce que établit la deuxième assertion de la Prop. 20.2.

Remarques. (1) Si $H(G, K_p)$ est une algèbre extérieure engendrée par des éléments de degrés impairs, on voit en combinant le Théor. 19.1 et la Prop. 20.2 que $H(G, K_p)$ a un système de générateurs primitifs; en caractéristique zéro, où cette hypothèse est toujours réalisée, on obtient le théorème de Samelson [28]; pour le démontrer sous la condition indiquée au début de cette remarque, il est inutile de recourir à la transgression, car la démonstration de Leray (loc. cit.[3] p. 133–134), ne nécessite pas d'hypothèse sur la caractéristique.

(2) On pourrait aussi démontrer $(T)_A$ à partir de $(P)_A$; en utilisant des opérateurs différentiels analogues à ceux de Leray (C. R. Acad. Sci. Paris 228 (1949), 1784–1786, il s'agit des opérateurs du No. 4); ils se définissent à partir du diagramme (20.1) qui m'a été justement à ce propos signalé par Leray; en les faisant opérer sur l'algèbre spectrale de $E(n, G)$, on peut montrer que les primitifs sont transgressifs.

§21. Trois homomorphismes associés à un sous-groupe

Notations. G groupe de Lie compact connexe, U sous-groupe fermé connexe, p^* et i^* les homomorphismes transposés de la projection de G sur G/U et de l'injection de U dans G.

L'anneau $A(=Z$ ou à $K_p)$ étant fixé, P_G sera le module des primitifs de $H(G, A)$, supposé sans torsion.

Nous étudierons tout d'abord p^* et i^* et généraliserons des résultats établis en caractéristique 0 par H. Samelson [28]; nous mettrons ensuite i^* en relations avec un homomorphisme canonique de $H(B_G, A)$ dans $H(B_U, A)$ qui sera souvent utilisé dans la suite.

PROPOSITION 21.1. *Si G vérifie $(P)_A$, l'image de p^* admet un système simple de générateurs primitifs.*

G opère par les translations sur G/U, d'où une application $\psi: G/U \times G \to G/U$ et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} G & \times G & \xrightarrow{f} & G \\ p\downarrow & \downarrow id. & & \downarrow p \\ G/U & \times G & \xrightarrow{\psi} & G/U \end{array} \tag{21.1}$$

qui donne la diagramme commutatif suivant (même pour $A = Z$, car $H(G, A)$ est supposé sans torsion):

$$\begin{array}{ccccc} H(G, A) & \otimes H(G, A) & \xleftarrow{f^*} & H(G, A) \\ p^*\uparrow & \uparrow id. & & \uparrow p^* \\ H(G/U, A) & \otimes H(G, A) & \xleftarrow{\psi^*} & H(G/U, A) \end{array}$$

Soit $x_1, \cdots, x_m$ une base de P_G, dont les k premiers vecteurs sous-tendent $p^*(H(G/U, A)) \cap P_G)$;[20] appelons *monôme simple* un produit $x_{i_1} \cdots x_{i_s}$ $(i_1 < \cdots < i_s)$ et soit Q l'espace vectoriel ayant comme base les monômes simples produits de x_i d'indices $\leqq k$; nous devons montrer que Q est l'image de p^*, il suffit de voir qu'il la contient, l'autre inclusion étant évidente. Il est clair que $p^*(H^i(G/U, A)) \subset Q$ pour $i = 1$, supposons l'avoir démontré si $i < n$ et soit $y \in H^n(G/U, A)$.

$\psi^*(y)$ est une somme de termes $y_i \otimes z_i$ $(y_i \in H(G/U, A),\ z_i \in H(G, A))$ et $p^*. \psi^*(y)$ est somme des termes $p^*(y_i) \otimes z_i$; l'ensemble de ces termes pour lesquels $Dz_i > 0$, peut s'écrire vue l'hypothèse d'induction comme somme d'éléments $c_j u_j \otimes v_j$ linéairement indépendants $(c_j \in A$, u_j monôme simple de Q, v_j monôme simple).

[20] Il faut bien remarquer que si une base de P_G est un système simple de générateurs, toute autre base l'est aussi; c'est évident pour $A = Z$ ou $A = K_p$ $(p \neq 2)$, car on est alors dans le cas de l'algèbre extérieure à générateurs de degrés impairs; pour $A = K_2$ on le démontre sans difficulté en utilisant les faits évidents que P_G contient tous les primitifs de $H(G, A)$ et que le carré d'un primitif est un primitif.

On peut d'autre part écrire $p^*(y) = a_1 w_1 + \cdots + a_t w_t$ ($a_i \in A$, w_1 primitif, $w_2, \cdots, w_t$ monômes simples, $w_1, w_2, \cdots, w_t$ linéairement indépendants); il suffira de montrer que $w_i \in Q$ ($i = 1, \cdots, t$). Prenons tout d'abord $i \geqq 2$, et soit $w_i = a_i x_{j_1} \cdots x_{j_s}$ ($s \geqq 2$); l'élément $x_{j_1} \otimes x_{j_2} \cdots x_{j_s}$ apparaîtra dans $h^*p^*(y)$ exactement une fois, avec le coefficient $\pm a_i$ puisque les x_i sont un système simple de primitifs; comme $h^*p^*(y) = p^*\psi^*(y)$ il faudra que cet élément soit égal à l'un des termes $u_j \otimes v_j$ décrits plus haut, par conséquent $x_{j_1} \in Q$, on voit de même que $x_{j_2}, \cdots, x_{j_s} \in Q$, d'où $w_i \in Q$ ($i \geqq 2$) w_i est ainsi dans l'image de p^*, il en est donc de même de $w_1 = p^*(y) - w_2 - \cdots - w_t$, mais w_1 est primitif, donc $w_1 \in Q$ par définition de Q; finalement $p^*(y) \in Q$, ce qui assure la passage à n.

Remarque. Si $A = Z$ ou si $A = K_p$ ($p \neq 2$), et si G vérifie $(P)_A$, on peut trouver dans $H(G/U, A)$ une sous-algèbre appliquée biunivoquement sur l'image de p^* ("remonter" des générateurs de cette image, ils sont forcément de carrés nuls); $(P)_0$ étant toujours réalisée, on retrouve en particulier un théorème de H. Samelson ([28], Satz V). La démonstration donnée ici est directement inspirée de Leray (C. R. Acad. Sci. Paris 228 (1949), 1545) bien que nous ne mentionnons pas explicitement les opérateurs différentiels δ, qui pourraient être définis à partir de ψ^* dès que $(P)_A$ est vérifiée: Si l'on exprime $\psi^*(y)$ comme somme de termes $y_i \otimes z_i$ où z_i est un monôme simple, l'opérateur associé à x_i fait correspondre à y l'élément y_j coefficient de $z_j = x_i$.

La Prop. 21.2 généralise le théorème II de [28].

Proposition 21.2. *Si G et U vérifient $(P)_A$, l'image de i^* admet un système simple de générateurs primitifs. Le noyau de i^* est l'idéal engendré par les primitifs de $H(G, A)$ que i^* annule.*

Corollaire. *Si P_G et P_U ont des bases formées d'éléments de degrés impairs et de carrés nuls, on peut écrire $H(G, A) = \wedge P_1 \otimes \wedge P_2, H(U, A) = \wedge R_1 \otimes \wedge R_2$, ($P_1 + P_2 = P_G, R_1 + R_2 = P_U$), i^* annule P_2 et applique ΛP_1 isomorphiquement sur ΛR_1.*

Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U \times U & \xrightarrow{i} & G \times G \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ U & \xrightarrow{i} & G \end{array}$$

montre que $i^*(P_G) \subset P_U$, ce qui compte tenu de,[20] permet de prouver la lère assertion; l'idéal des primitifs annulés par i^* fait naturellement partie du noyau de i^*, des considérations faciles de dimensions montrent qu'il lui est égal; le corollaire est clair.

L'homomorphisme ρ^*. Soit $E(n, G)$ un espace universel pour G, il l'est aussi pour U, on peut écrire $E(n, G)/U = B(n, U)$, $E(n, G)/G = B(n, G)$; la projection ρ_n du ler de ces espaces sur le deuxième induit un homomorphisme ρ_n^*: $H(B(n, G), M) \to H(B(n, U), M)$. Si E_1 et E_2 sont deux espaces universels pour G et pour n, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} E_2 & \xleftarrow{\bar{f}_2} & E_1 \times E_2 & \xrightarrow{\bar{f}_1} & E_1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ E_2/U & \longleftarrow & (E_1, E_2)_U & \longrightarrow & E_1/U \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ E_2/G & \longleftarrow & (E_1, E_2)_G & \longrightarrow & E_1/G \end{array}$$

où $\bar{f}_1$ et $\bar{f}_2$ sont les projections, montre que cet homomorphisme est indépendant de l'espace universel considéré aux identifications canoniques du §18 près. Cela légitime la définition

DEFINITION. *Soit G de Lie compact, U un sous-groupe fermé. On désigne par $\rho_M^*(U, G)$ l'homomorphisme canonique $H(B_G, M) \to H(B_U, M)$ qui pour tout n est jusqu'à n l'homomorphisme $H(B(n, G), M) \to H(B(n, U), M)$ déduit de la projection de $E(n, G)/U$ sur $E(n, G)/G$.*

Notations. On écrira aussi $\rho_p^*(U, G)$ si $M = K_p$, $\rho^*(U, G)$ si $M = Z$. En supposant G et U connexes, vérifiant $(T)_A$, nous allons voir que l'on peut remplacer la considération de i^* par celle de ρ^*; cette substitution est intéressante parce que l'on peut souvent calculer ρ^* effectivement (voir §28 à 31).

Scient D_G le sous-espace de $H(B_G, A)$ sous-tendu par $H^0(B_G, A)$ et par les éléments décomposables, et π la projection de $H(B_G, A)$ sur $Q_G = H(B_G, A)/D_G$; Q_G est gradué par les sous-espaces $Q_G^n = H^n/D_G \cap H^n$, soit de même $P_G^n = P_G \cap H^n(G, A)$, P_G^n est l'ensemble des éléments universellement transgressifs de degré n (Prop. 20.2). Les démonstrations des Théorème 13.1, 19.1, des Prop. 16.1 et 19.2 montrent que dans l'algèbre spectrale d'un espace universel la différentielle d_s établit un isomorphisme entre P_G^{s-1} et Q_G^s, qui est la transgression (§5). A priori cet isomorphisme est défini par la transgression dans un espace universel particulier, mais le diagramme (18.1) établit un isomorphisme entre les algèbres spectrales de E_1 et E_2 (au moins pour $D \leqq n - k$, $k = \dim. G$) ce qui montre que l'isomorphisme $P_G^{s-1} \to Q_G^s$ ne dépend pas de l'espace universel choisi.

Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E(n, G) & \xleftrightarrow{id.} & E(n, G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E(n, G)/U & \xrightarrow{\rho_n} & E(n,G)/G \end{array}$$

donne un homomorphisme de l'algèbre spectrale de $E(n, G) \to B(n, G)$ dans celle de $E(n, U) \to B(n, U)$, on en tire la:

PROPOSITION 21.3. *Soient G, U vérifiant $(T)_A$. Si l'on identifie P_G et P_U à Q_G et à Q_U respectivement par la transgression, i^* se transporte en l'homomorphisme de Q_G dans Q_U défini par passage au quotient à partir de $\rho_A^*(U, G)$.*

COROLLAIRE. *Sous les hypothèses faites, U est totalement non homologue à zéro dans G relativement à A si et seulement si $\rho_A^*(U, G)$ est un homomorphisme sur.*

§22. Deux algèbres spectrales

Ce paragraphe est consacré à des algèbres spectrales relatives aux espaces fibrés principaux et aux espaces homogènes, ou interviennent des espaces classifiants, qui seront très fréquemment utilisées dans la suite.

E_G et B_G sont des espaces universels et classifiants pour une dimension n assez grande. En fait les énoncés et démonstrations qui suivent ne sont en toute rigeur valables que jusqu'à un certain degré (par exemple pour $D \leqq n - s$, s dimension de G ou U), nous nous permettrons néanmoins de ne pas le mentionner, surtout parce que l'on peut souvent passer à n infini, comme nous l'indiquerons à la fin de ce paragraphe.

Nous aurons à considérer des faisceaux localement constants sur des espaces classifiants, aussi supposerons-nous dorénavant les espaces universels globalement et localement connexes et simplement connexes *par arcs*, ce qui n'est pas une restriction essentielle vu la possibilité de prendre les variétés de Stiefel. Les faisceaux localement constants sur B_G se ramènent alors aux systèmes locaux de coefficients, et si G_0 est la composante connexe de l'élément neutre de G, on a $\pi_1(B_G) \cong G/G_0$.

THEOREME 22.1. *Soit U de Lie compact, (X, Y, U, p) un espace fibré principal localement compact, connexe.*

Alors il existe une algèbre spectrale canonique dans laquelle $H_2 = H(B_U, H(X, M))$ et qui se termine par l'algèbre graduée associée à $H(Y, M)$ convenablement filtrée.

Les éléments de $H^0(B_U, H(X, M)) = H(X, M)$ qui sont des cocycles pour toutes les différentielles forment l'image de p^*. Si X est compact, l'homomorphisme $H(B_U, M) \to H(Y, M)$ déduit de l'algèbre spectrale est l'homomorphisme caractéristique de (X, Y, U, p).

La ligne inférieure de (18.3) écrit pour E_U et X est:

$$B_U \xleftarrow{f} (E_U, X)_U \xrightarrow{g} Y$$

f fait de $(E_U, X)_U$ un espace fibré $((E_U, X)_U, B_U, X, f)$, et g^* identifie $H(Y, M)$ à $H((E_U, X)_U, M)$; l'algèbre spectrale de f répond aux conditions de l'énoncé. Si i est l'injection d'une fibre X dans $(E_U, X)_U$ alors $p = i \circ g$ (cf. §2), p^* se ramène donc à i^*, une fois $H(Y, M)$ et $H((E_U, X)_U, M)$ identifiés par g^*; son image est l'ensemble des éléments de $H(X, M)$ qui sont cocycles pour toutes les différentielles d'après le §4c. Enfin, si X est compact, l'homomorphisme $H(B_U, M) \to H((E_U, X)_U, M)$ déduit de l'algèbre spectrale est f^* (§4b); combiné avec $g^{*^{-1}}$, il donne bien l'homomorphisme caractéristique.

REMARQUES. L'algèbre spectrale du théorème est donc celle de $((E_U, X)_U, B_U, X, f)$; nous n'avons pas supposé U connexe, si U_0 est sa composante connexe de l'élément neutre, $\pi_1(B_U) \cong U/U_0$ peut agir non trivialement sur $H(X, M)$, H_2 est l'algèbre de cohomologie de B_U à coefficients dans un système local de coefficients; en fait, ce système sera toujours simple dans les applications que nous donnerons.

(2) Si U est discret, $H(B_U, H(X, M))$ est, *au sens des groupes discrets,* l'algèbre de cohomologie de U, à valeurs dans $H(X, M)$ sur laquelle U opère; (H_r) est probablement la suite spectrale des revêtement finis de H. Cartan-J. Leray (Colloque de Topologie Algébrique, Paris (1949), p. 83–85).

(3) Si $X = G$ est un groupe de Lie compact connexe dont U est un sous-groupe fermé, on peut envisager $(E_U, G)_U$ comme espace fibré principal de fibre G (on fait opérer G dans $E_U \times G$ par $(e, g)\cdot g' = (e, g'^{-1}\cdot g)$ si u opère par $(e, g)\cdot u = (e\cdot u, g\cdot u)$), et puisque G est supposé connexe, $\pi_1(B_U)$ agit toujours trivialement sur $H(G, M)$. Un cas particulier important est l'objet de la proposition suivante, où nous utilisons les notations du §21.

PROPOSITION 22.1. *Soit G de Lie compact connexe vérifiant $(T)_A$, $x_1, \cdots, x_l$ une base de P_G, $y_1, \cdots, y_l$ des générateurs de $H(B_G, A)$ leur correspondant par transgression.*

Dans l'algèbre spectrale du Théorème 22.1 *pour $X = G$ on a $H_2 = H(B_U, A) \otimes H(G, A)$ et de plus*

$$d_r\kappa_r^2(1 \otimes x_i) = \kappa_r^2(\rho_A^*(U, G)(y_i) \otimes 1),$$

$$(i = 1, \cdots, l; r = Dx_i).$$

Partant d'un espace E_G universel pour G (donc pour U) on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (E_U, G)_U & \xrightarrow{\bar\rho_n} & (E_G, G)_G \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow \\ B_U & \xrightarrow{\rho_n} & B_G \end{array}$$

mais $(E_G, G)_G$ s'identifie naturellement à E_G, $\bar\rho_n^*$ est donc un homomorphisme de l'algèbre spectrale de (E_G, B_G, G, p) dans celle de $((E_U, G)_U, B_U, G, f)$, d'où notre proposition, compte tenu du §4d.

THEOREME 22.2. *Soit U un sous-groupe fermé du groupe de Lie compact G, G/U etant connexe Alors il existe une algèbre spectrale où $H_2 = H(B_G, H(G/U, M))$ et qui se termine par l'algèbre graduée associée à $H(B_U, M)$ convenablement filtrée.*

L'homomorphisme $H(B_G, A) \to H(B_U, M)$ défini par l'algèbre spectrale est $\rho_M^*(U, G)$. Les éléments de $H(G/U, M)$ qui sont des cocycles pour toutes les différentielles forment la sous-algèbre caractéristique de $(G, G/U, U, p)$.

On prendra l'algèbre spectrale de la fibration $(E_G/U, E_G/G, G/U, \rho_n)$, qui peut s'écrire $(B_U, B_G, G/U, \rho_n)$; l'homomorphisme $H(B_G, M) \to H(B_U, M)$ déduit de l'algèbre spectrale est ρ_n^*, qui est $\rho_M^*(U, G)$ par définition.

Pour définir la sous-algèbre caractéristique de $(G, G/U, U, p)$ on part du diagramme suivant, où l'on écrit E_G pour E_U :

$$\begin{tikzcd} E_G \arrow[d] & E_G \times G \arrow[l, "\bar{f}"'] \arrow[r, "\bar{h}"] \arrow[d] & G \arrow[d, "p"] \\ E_G/U & (E_G, G)_U \arrow[l, "f"'] \arrow[r, "h"] & G/U \end{tikzcd}$$

et l'homomorphisme caractéristique est $\sigma^* = h^{*^{-1}} \circ f^*$ (cf. §18). Soit e un élément fixe de E_G, $\bar{\zeta}: G \to E \times G$ l'homomorphisme défini par $\bar{\zeta}(g) = (e.\, g, g)$; $\bar{f} \circ \bar{\zeta}$ est l'injection de la fibre de e, et $\bar{h} \circ \bar{\zeta} = id.$; $\bar{\zeta}$ passe au quotient par U et donne une application $\zeta: G/U \to (E_G, G)_U$ telle que $f \circ \zeta$ soit l'injection d'une fibre et que $h \circ \zeta = id.$; alors

$$\sigma^* = h^{*^{-1}} \cdot f^* = \zeta^* \circ f^* = i^*.$$

l'image de σ^* est donc bien formée des éléments de $H(G/U, M)$ qui sont cocycles pour toutes les différentielles, (§4c).

Proposition 22.2. *Soit U un sous-groupe invariant fermé du groupe de Lie compact G. Alors il existe une algèbre spectrale dans laquelle $H_2 = H(B_{G/U}, H(B_U, M))$ et qui se termine par l'algèbre graduée associée à $H(B_G, M)$ convenablement filtrée.*

$B_U = E_G/U$ est ici aussi un espace fibré principal $(E_G/U, B_G, G/U, p_n)$ de groupe G/U. Il suffit d'appliquer le Théorème 22.1 en prenant $X = E_G/U = B_U$, $Y = B_G$ et en remplaçant U par G/U.

Cette algèbre spectrale qui m'a été signalée par J. P. Serre est l'analogue pour les groupes de Lie compacts de celle qu'il a introduite dans l'étude des extensions de groupes discrets (C. R. Acad. Sci. Paris *231* (1950), p. 643–646).

Remarque sur le passage à n infini. Il est en général inutile d'introduire une borne supérieure finie pour le degré dans les énoncés précédents car:

La Prop. 22.1 *et le Théor.* 22.2 *sont valables si on interprète les termes H_2 comme algèbres de cohomologie d'espaces classifiants pour tout n au sens de la définition* 18.2; *il en est de même pour le Théorème* 22.1 *si U est connexe et pour la Prop.* 22.2 *si G/U est connexe.*

L'algèbre spectrale du Théorème 22.1 est celle de $((E_U, X)_U, B_U, X, p)$, et on a dans H_2 des coefficients ordinaires si U est connexe (car B_U est simplement connexe, cf début du §22). Si E_1 et E_2 sont deux espaces universels pour U et pour n les deux lignes inférieures du diagramme (18.5), où l'on fait $X = F$, $G = U$, permettent d'établir un isomorphisme canonique entre les algèbres spectrales de $((E_2, X)_U, B_2, X, p_2)$ et de $((E_1, X)_U, B_1, X, p_1)$ pour $D \leqq n - s$, ($s = \dim. U$). On peut donc définir sans ambiguité une algèbre spectrale canonique (H_r), ($r \geqq 2$) qui pour tout n est isomorphe jusqu'à $n - s$ à l'algèbre spectrale de $((E(n, U), X)_U, B(n, U), X, p)$, c'est l'algèbre spectrale annoncée. Cela s'applique aussi aux Prop. 22.1 et 22.2, cas particuliers du Théorème 22.1; dans cette dernière, il y a encore lieu de faire un passage à n infini pour obtenir en fibre $H(B_U, A)$ au lieu de $H(B(n, U), A)$, ce qui ne présente pas de difficulté. Enfin, pour le Théorème 22.2, on utilisera de même les deux lignes inférieures du diagramme qui précède la définition de $\rho_M^*(U, G)$ dans le §21.

§23. Cohomologie des espaces classifiants pour les groupes orthogonaux unimodulaires

$\mathbf{SO}(m)$ n'a pas de p-torsion pour $p \neq 2$ et on peut appliquer le Théorème 19.1; par contre il possède de la 2-torsion si $m > 2$ et $H(\mathbf{SO}(m), K_2)$ a un système simple de générateurs de degrés $1, 2, \cdots, m-1$ (Prop. 10.3); nous voulons montrer que l'on peut prendre un système de générateurs universellement transgressifs; c'est clair pour x_1; on sait d'autre part que x_i peut être choisi comme image d'un élément non nul de $H^i(\mathbf{V}_{m,m-i}, K_2)$ par la transposée de la projection p_{m-i} de $\mathbf{SO}(m)$ sur $\mathbf{V}_{m,m-i}$ ($i \geqq 2$, cf. §10, rem. 1).

Soit $(E, B, \mathbf{SO}(m), p)$ un espace fibré principal compact connexe, il est aussi fibré principal de groupe $\mathbf{SO}(i)$, d'où la fibration $(E/\mathbf{SO}(i), B, \mathbf{V}_{m,m-1}, p)$ et le diagramme commutatif suivant, où les flèches horizontales sont les projections canoniques, les flèches verticales des injections, P un point,

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{SO}(m) & \xrightarrow{p_{m-i}} & \mathbf{V}_{m,m-i} & \longrightarrow & P \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ E & \longrightarrow & E/\mathbf{SO}(i) & \longrightarrow & B \end{array}$$

qui montre que si $h \in H(\mathbf{V}_{m,m-i}, K_2)$ est transgressif dans $E/\mathbf{SO}(i)$, $p_{m-i}^*(h)$ l'est dans E; les éléments de degré positif minimum de $H(\mathbf{V}_{m,m-i}, K_2)$ étant évidemment transgressifs, x_i est bien transgressif dans E. En prenant pour E un espace universel et en appliquant la Prop. 19.2 on voit:

PROPOSITION 23.1. *$H(\mathbf{SO}(m), K_2)$ possède un système simple de générateurs universellement transgressifs $x_1, \cdots, x_{m-1}$ de degrés $1, 2, \cdots, m-1$ et $H(B_{\mathbf{SO}(m)}, K_2) = K_2[y_1, \cdots, y_{m-1}](Dy_i = i+1)$, y_i classe de cohomologie d'une cochaîne de transgression pour x_i dans $E(n, \mathbf{SO}(m))$; x_i est déterminé à un multiple scalaire près.*

Mais on peut prendre comme espaces universels et classifiants pour $n-1$ les variétés $\mathbf{V}_{n+m,m}$ et $\mathbf{G}^0_{n+m,m}$ (cf. §18), on retrouve ainsi la Proposition suivante, due à L. S. Pontrjagin [27]:

PROPOSITION 23.2. *Pour $D < n$, $H(\mathbf{G}^0_{n+m,m}, K_2)$ est isomorphe à une algèbre de polynômes $K_2[y_1, \cdots, y_{m-1}]$ à $m-1$ variables de degrés $2, 3, \cdots, m$.*

Il ne nous semble pas possible d'obtenir sans détours un résultat analogue de S. S. Chern [13] sur la cohomologie des grassmanniennes $\mathbf{G}_{n+m,m}$: $H(\mathbf{G}_{n+m,m}, K_2) = K_2[y_0, y_1, \cdots, y_{m-1}](Dy_i = i+1)$ pour $D < n$; du reste le formalisme développé dans ce travail est surtout adapté au cas des groupes connexes. Nous comblerons cette lacune dans un travail ultérieur mentionné dans l'introduction, où nous donnerons aussi l'algèbre de cohomologie mod 2 complète de $\mathbf{G}_{n+m,m}$.

La démonstration de la Prop. 23.1 utilise les variétés de Stiefel et montre que l'on peut prendre comme générateurs de $H(\mathbf{G}^0_{n+m,m}, K_2)$ leur correspondant par transgression les classes de Stiefel-Whitney réduites de $\mathbf{G}^0_{n+m,m}$ ce qui est bien connu. De même on établira des liens entre les générateurs de $H(B_{\mathbf{U}(m)}, Z)$ et les classes de Chern des grassmanniennes complexes.

Enfin remarquons qu'une démonstration analogue à celle de la Prop. 23.1 donne la

PROPOSITION 23.3. *$H(\mathbf{V}_{n,n-q}, K_2)$ a un système simple de générateurs universellement transgressifs $x_q, \cdots, x_{n-1}$ de degrés $q, q+1, \cdots, n-1$ pour les espaces fibrés à groupe structural $\mathbf{SO}(m)$, agissant sur $\mathbf{V}_{n,n-q}$ par les opérations que définit la fibration $\mathbf{SO}(m)/\mathbf{SO}(q)$.*

CHAPITRE VI. COHOMOLOGIE RÉELLE DES ESPACES FIBRES PRINCIPAUX ET DES ESPACES HOMOGÈNES

Notations. Dans tout ce chapitre, $H(X)$ est l'algèbre de cohomologie de X pour les coefficients réels; G et U sont des groupes de Lie compacts.

$H(B_G, R)$ sera notée S_G ; c'est donc une algèbre de polynômes. S_G^+ est la sous-algèbre formée des éléments de degré > 0 des S_G.

§24. Cohomologie des espaces fibres principaux compacts

Nous avons rappelé dans la Prop. 3.1 qu'un espace compact de dimension finie (séparable métrique) possède une R-couverture fine *anticommutative*, par exemple pour une variété différentiable l'algèbre des formes différentielles extérieures. Ce fait et le Théorème 19.1 de transgression sont à la base de la démonstration des Théorème 24.1 et 24.1′, qui généralisent dans le cas compact un résultat de C. Chevalley valable pour les espaces fibrés différentiables (démonstration non publiée, cf. J. L. Koszul [22], Théorème I).

En cohomologie réelle, le Théorème 19.1 s'applique toujours: $H(G) = \wedge P$ est l'algèbre extérieure de l'espace P de ses éléments universellement transgressifs, qui est gradué par des degrés impairs. Soit (E, B, G, p) un espace fibré principal compact connexe, localement connexe, de dimension finie, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ des R-couvertures fines anticommutatives de E et B, $\mathcal{C} = p^{-1}\mathcal{B} \bigcirc \mathcal{E}$; $\mathcal{C}$ est donc anticommutative pour le degré total; soient $x_1, \cdots, x_l$ une base de P, $c_i \in \mathcal{C}$ une cochaîne de transgression pour x_i, et appelons b_i l'unique élément de $\mathcal{B}$ tel que $p^{-1}(b_1) \bigcirc u = dc_i (i = 1, \cdots, l; u =$ élément neutre de $\mathcal{E})$.

Nous munissons le produit tensoriel gauche L sur R de $\mathcal{B}$ et $H(G)$ d'une différentielle d canonique pour le degré total vérifiant

$$(24.1) \qquad d(b \otimes 1) = db \otimes 1; \qquad d(1 \otimes x_i) = b_i \otimes 1 \quad (i = 1, \cdots, l)$$

(il faut naturellement s'assurer que ces conditions déterminent complètement une différentielle, mais c'est immédiat); ainsi d augmente le degré total de un et prolonge la différentielle de $\mathcal{B}$.

Définissons une application linéaire λ de $\mathcal{B} \otimes P$ dans $\mathcal{C}$ par:

$$\lambda(b \otimes 1) = p^{-1}(b) \bigcirc u; \qquad \lambda(1 \otimes x_i) = c_i \quad (i = 1, \cdots, l)$$

$\mathcal{C}$ étant anticommutative pour le degré total, λ se prolonge de façon unique en un *homomorphisme multiplicatif* de $L = \mathcal{B} \otimes \wedge P$ dans $\mathcal{C}$. qui est compatible avec les différentielles, d'où un homomorphisme de $H(L)$ dans $H(\mathcal{C}) = H(E)$, que nous notons aussi λ. Nous désignons par q l'homomorphisme de $H(B)$ dans $H(L)$ résultant de l'inclusion de $\mathcal{B}$ dans L; un élément de $1 \otimes \wedge P$ ne peut évidemment jamais être un cobord dans L, une classe de cohomologie de L contient donc au plus un cocycle de $1 \otimes \wedge P$; en lui associant ce cocycle (si elle en contient un), on définit un isomorphisme d'une sous-algèbre de $H(L)$ sur une sous-algèbre de $H(G)$, noté r.

THÉORÈME 24.1. *Soit (E, B, G, p) un espace fibré principal compact, globalement et localement connexe, de dimension finie à fibres connexes, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ des R-couvertures fines anticommutatives de E et B.*

Alors l'homomorphisme λ précédemment défini de $L = \mathcal{B} \otimes H(G)$ dans $p^{-1}\mathcal{B} \bigcirc \mathcal{E}$ induit un isomorphisme de $H(L)$ sur $H(E)$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & H(\mathcal{B}\otimes H(G)) \arrow[dr, "r"] \arrow[dd, "\lambda"] & \\ H(B) \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "p^*"'] & & H(G) \\ & H(E) \arrow[ur, "i^*"'] & \end{tikzcd}$$

DÉMONSTRATION: Nous filtrons L par les sous-espaces

$$L^p = \textstyle\sum_{i \geqq p} \mathcal{B}^i \otimes H(G).$$

Pour $\mathcal{C}$ nous reprenons la filtration du §4 par

$$S^p = \textstyle\sum_{i \geqq p} p^{-1}(\mathcal{B}^i) \bigcirc \mathcal{E}$$

évidemment $\lambda(L^p) \subset S^p$, λ définit donc un homomorphisme de l'algèbre spectrale (H_r^*) de L dans l'algèbre spectrale (H_r) de $\mathcal{C}$, qui est celle du Théorème 4.1 Pour obtenir notre théorème il suffit par exemple de prouver que λ est un isomorphisme de H_2^* sur H_2, puisqu'alors c'est un isomorphisme de H_r^* sur H_r $(r \geqq 2)$ et de $H(L)$ sur $H(C)$, (cf. §1D). On a tout d'abord

$$H_0^* = G(L) \cong L, \qquad H_0^{*p} \cong \mathcal{B}^p \otimes H(G)$$

puisque $d(L^p) \subset L^p$. Sur $H_0^* = L^p/L^{p+1}$, d_0^* est l'endomorphisme obtenu par passage au quotient à partir de d, mais il est clair vu la définition de d, que $d(L^p) \subset L^{p+1}$; ainsi d_0^* est nul sur H^{*p}_0 (p quelconque) donc sur H_0^* et $H_1^* = H_0^* =$ cela peut aussi s'écrire dans les notations du §1:

$$C_1^{*p} = L^p; \qquad C_1^{*p+1} + D_0^p = L^{p+1}$$

d_1^* est sur H_1^{*p} obtenue par passage au quotient à partir de l'homomorphisme de paires

$$(L^p, L^{p+1}) \xrightarrow{d} (L^{p+1}, L^{p+2})$$

Considérons par exemple $b^p \otimes x_i \in \mathcal{B} \otimes P$. On a

$$d(b^p \otimes x_i) = db^p \otimes x_i \pm b^p \cdot b_i \otimes 1 \qquad (Db_i = Dx_i + 1)$$

le 1er terme est dans L^{p+1}, le deuxième dans L^{p+2}, donc $d_1^*(b^p \otimes x_i) = db \otimes x_i$, cela vaut aussi naturellement pour un élément $b \otimes x \in \mathcal{B}^p \otimes H(G) = H_1^{*\,p}$, et montre que d_1^* est la *différentielle partielle par rapport à* $\mathcal{B}$ de $H^*{}_1 \cong \mathcal{B} \otimes H(G)$. Par conséquent $H_2^* = H(B) \otimes H(G)$. Il est bien isomorphe à H_2, il faut encore voir que λ est un isomorphisme de H_2^* sur H_2, c'est immédiat: Si b est un cocycle de $\mathcal{B}$, $b \otimes 1$ et $p^{-1}(b) \bigcirc u$ ont dans H_2^* et H_2 le même image, à savoir la classe de cohomologie de b (pour H_2^* nous venons de la démontrer pour H_2, voir définition de π^* dans le §4); ensuite l'image de $\lambda(x_i) = c_i$ dans H_2 est bien x_i vu la définition de ι_b^* au §4. λ est donc l'identité sur $H(B) \otimes P$, comme il est multiplicatif c'est bien un isomorphisme de H_2^* sur H_2.

Par définition même on a $p^* = \lambda \circ q$, ce qui donne la partie de gauche du diagramme; les éléments de $H_2^{*0,s} = H^s(G)$ qui sont cocycles pour toutes les différentielles sont exactement les éléments de $H^s(G) \subset L$ qui sont cocycles pour d, comme il résulte facilement des définitions, c'est donc l'image de r; λ les met ainsi en correspondance biunivoque avec les éléments de $H_\infty^{0,s}$ qui forment l'image de i^*, cela montre la commutativité de la partie droite du diagramme. c.q.f.d.

Dans cette démonstration, nous n'avons pas pleinement utilisé l'hypothèse que (E, B, G, p) est fibré principal à fibre de Lie compacte connexe. Sont intervenus les faits que $H(G)$ était algèbre extérieure d'un espace d'éléments transgressifs, et que dans l'algèbre spectrale de la fibration on a $H_2 = H(B) \otimes H(G)$. Le Théorème 24.1 admet donc la généralisation suivante:

Théorème 24.1′. *Soit* (E, B, F, p) *un espace fibré compact, globalement et localement connexe, de dimension finie. On suppose que* $H(F)$ *est l'algèbre extérieure d'un espace gradué par des degrés impairs, sous-tendu par des éléments transgressifs dans* E, *et que dans l'algèbre spectrale de cette fibration on a* $H_2 = H(B) \otimes H(F)$.

Alors la conclusion du Théorème 24.1, *où l'on remplace* G *par* F, *est aussi valable.*

Remarque. Si B est une variété différentiable, on peut prendre pour $\mathcal{B}$ l'algèbre des formes différentielles extérieures, on retrouve le théorème de Chevalley, mais il faut relever que ce dernier vaut aussi dans les espaces fibrés différentiables non compacts.

§25. Cohomologie des espaces homogènes

Le Théorème 24.1 montre que $H(E)$ est déterminée par $H(G)$, $\mathcal{B}$ et la transgression, mais n'affirme pas qu'elle l'est déjà par $H(G)$, $H(B)$ et la transgression; c'est cependant le cas si $\mathcal{B}$ est formée de cocycles, ainsi que l'a remarqué J. L. Koszul, car L s'identifie alors à $H(B) \otimes H(G)$ muni d'une différentielle nulle sur $H(B)$ définie par la transgression; cette condition ne peut être réalisée ici car $\mathcal{B}$ est supposée être une R-couverture fine, mais, comme nous allons le voir, il suffit déjà que $\mathcal{B}$ contienne une sous-algèbre de cocycles, possédant un représentant de chaque élément de $H(B)$.

(E, B, G, p) étant toujours un espace fibré principal compact, globalement et localement connexe, nous considérerons dans ce paragraphe $H(B) \otimes H(G)$ muni de la différentielle d "de transgression" définie par

$$d(H(B) \otimes 1) = 0 \qquad d(1 \otimes x_i) = b_i \otimes 1 \qquad (i = 1, \cdots, l) \tag{25.1}$$

$x_1, \cdots, x_l$ étant une base de l'espace des éléments universellement transgressifs de $H(G)$, et b_i une image de x_i par transgression.

THÉORÈME 25.1. *Soient (E, B, G, p) un espace fibré principal, compact globalement et localement connexe à fibres connexes, $\mathcal{B}$ une R-couverture fine anticommutative de B. On suppose que $\mathcal{B}$ possède une sous-algèbre $\mathcal{B}'$ formée de cocycles et contenant exactement un cocycle de chaque classe de cohomologie.*

Alors $H(E)$ est canoniquement isomorphe à $H(H(B) \otimes H(G))$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & H(H(B) \otimes H(G)) \arrow[dd, "\lambda"] \arrow[dr, "r"] & \\ H(B) \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "p^*"'] & & H(G). \\ & H(E) \arrow[ur, "i^*"'] & \end{tikzcd}$$

Soient $L = \mathcal{B} \otimes H(G)$, $L' = \mathcal{B}' \otimes H(G)$; pour chaque x_i nous prenons une cochaîne de transgression c_i au sens large telle que dc_i soit le représentant de b_i contenu dans $\mathcal{B}'$, ce qui est possible d'après le lemme 5.2, et munissons L de la différentielle d définie par (24.1). Dans ce cas, L' est une *sous-algèbre stable* et la différentielle induite est justement celle de (25.1), (car $\mathcal{B}' \cong H(B)$). Introduisons dans L et L' les filtrations définies par les modules S^p de la démonstration du Théorème 24.1, resp. par $S'^p = S^p \cap L'$; l'inclusion de L' dans L induit un homomorphisme de l'algèbre spectrale (H'_r) de L' dans l'algèbre spectrale (H^*_r) de L; on a vu dans la démonstration du Théorème 24.1 que $H^*_2 = H(B) \otimes H(G)$, de même évidemment on aura $H'_2 = H(B) \otimes H(G)$ et l'inclusion de L' dans L induit visiblement un isomorphisme de H'_2 sur H^*_2 ; elle induit donc aussi un isomorphisme de $H(L') = H(H(B) \otimes H(G))$ sur $H(L)$; or ce dernier est égal à $H(E)$ d'après le Théorème 24.1, d'où notre Théorème, compte tenu du diagramme du Théorème 24.1.

COROLLAIRE (Koszul [22]). *Soit G de Lie compact connexe, U un sous-groupe fermé connexe tel que G/U soit un espace symétrique.*

Alors $H(G) = H(H(G/U) \otimes H(U))$, on a le diagramme commutatif.

$$\begin{tikzcd} & H(H(G/U) \otimes H(U)) \arrow[dd, "\lambda"] \arrow[dr, "r"] & \\ H(G/U) \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "p^*"'] & & H(U). \\ & H(G) \arrow[ur, "i^*"'] & \end{tikzcd}$$

Soient $\mathcal{B}$ l'algèbre des formes différentielles sur G/U, $\mathcal{B}'$ celle des formes différentielles invariantes par les opérations de G; on sait que $\mathcal{B}'$ est formée de cocycles, et contient exactement un représentant de chaque classe de cohomologie ([8], No. 10). On applique le Théorème 25.1 ou l'on remplace E, B, G resp. par G, G/U, U.

COMPLEMENT AU THÉORÈME 25.1. *Si $\mathcal{B}'$ ne vérifie l'hypothèse que pour les éléments de degré $D \leqq n$, alors la conclusion subsiste pour les éléments de degrés $\leqq n - s$, ($s = \dim. G$).*

En effet, on a encore pour $D \leqq n$, $L' = H(B) \otimes H(G)$ d'où $H(L') = H(H(B) \otimes H(G))$ pour $D < (n - 1)$; de même on a $H_2' = H(B) \otimes H(G)$ pour $D \leqq n$ est l'inclusion de L' dans L détermine un isomorphisme de H_2' sur H_2^* pour les éléments de degré total $D \leqq n$, donc aussi un isomorphisme de $H(L')$ sur $H(L)$ pour les éléments de $D \leqq n - s$. c.q.f.d.

THÉORÈME 25.2 (H. Cartan [11b]). *Soient U un sous-groupe fermé connexe du groupe de Lie compact connexe G, $x_1, \cdots, x_l$ un système de générateurs universellement transgressifs de $H(G)$, $y_1, \cdots, y_l$ des générateurs de S_G qui leur correspondent par transgression dans un espace universel E_G.*

Alors $H(G/U)$ est canoniquement isomorphe à $H(S_U \otimes H(G))$, l'algèbre $S_U \otimes H(G)$ étant munie d'une différentielle nulle sur S_U, vérifiant $d(1 \otimes x_i) = \rho^*(y_i) \otimes 1$, $(i = 1, \cdots, l)$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & H(S_U \otimes H(G)) \arrow[dr, "r"] \arrow[dd, "\mu"] & \\ S_U \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "\sigma^*"'] & & H(G) \arrow[dl, "p^*"] \\ & H(G/U) & \end{tikzcd}$$

(ρ^* désigne l'homomorphisme $\rho^*(U, G)\colon S_G \rightarrow S_U$, défini dans le §21, q est défini par l'inclusion, r comme dans le §24, σ^* est l'homomorphisme caractéristique de $(G, G/U, U, p)$, l'isomorphisme μ sera défini plus bas).

DÉMONSTRATION. Nous partons d'un espace $X = (E(n, U), G)_U$, (n grand) $E(n, U)$ étant supposé de dimension finie; X admet deux fibrations souvent considérées: $(X, B(n, U), G, f)$ et $(X, G/U, E(n, U), g)$; par Vietoris g^* est un isomorphisme de $H(G/U)$ sur $H(X)$ pour $D \leqq n$. La 1ère fibration vérifie toutes les hypothèses du Théor. 24.1, de plus l'homomorphisme de $(X, B(n, U), G, f)$ dans (E_G, B_G, G, p) établi dans la démonstration de la Prop. 22.1 montre que $b_i = \rho^*(y_i)$ est image de x_i par transgression dans X $(i = 1, \cdots, l)$.

$H(B(n, U))$ est pour $D \leqq n$ une algèbre de polynômes $R[z_1, \cdots, z_k]$; prenons dans une R-couverture fine anticommutative $\mathcal{B}$ de $B(n, U)$ un cocycle u_j de z_j $(j = 1, \cdots, k)$ et soit $\mathcal{B}'$ la sous-algèbre engendrée par $1, u_1, \cdots, u_k$ et tous les éléments de degrés $>n$ de $\mathcal{B}$. Comme elle est anticommutative, et que $H(B(n, U))$ est une algèbre de polynômes pour $D \leqq n$, on voit que $\mathcal{B}'$ ne contient pour $D \leqq n$ que des cocycles, et possède exactement un représentant de chaque classe de cohomologie. Le complément au Théorème 25.1 donne alors pour $D \leqq n - s$ le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & H(S_U \otimes H(G)) \arrow[dd, "\lambda"] \arrow[dr, "r"] & \\ S_U \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "f^*"'] & & H(G) \\ & H(X) & \end{tikzcd} \tag{25.2}$$

Posons $\mu = g^{*^{-1}} \circ \lambda$, c'est un isomorphisme de $H(S_U \otimes H(G))$ sur $H(G/U)$ pour $D \leqq n - s$; comme $g^{*^{-1}} \circ f^* = \sigma^*$ par définition (Déf. 18.3) et que $p^* = i^* \circ g^*$ d'après (2.5), on tire de (25.2) le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & H(S_U \otimes H(G)) \arrow[dd, "\mu"] \arrow[dr, "r"] & \\ S_U \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "\sigma^*"'] & & H(G) . \\ & H(G/U) \arrow[ur, "p^*"'] & \end{tikzcd} \tag{25.3}$$

Ce diagramme est établi pour $D \leqq n - s$ mais en prenant n de plus en plus grand et en passant à la limite on voit qu'il vaut sans restriction sur D, ce qui démontre le Théorème 25.2.

§26. Quotient d'un groupe compact par un sous-groupe de même rang

Nous rappelons au début des §26 et 27 quelques points de la théorie des groupes de Lie compacts (*voir* par exemple [20], [33]).

Soit G un groupe de Lie compact connexe de dimension n; il contient des sous-groupes à un paramètre donc des tores et même des tores maximaux; ces derniers sont en même temps sous-groupes abéliens maximaux; deux quelconques d'entre eux sont conjugués par un automorphisme intérieur de G et leur dimension commune définit le *rang* l (au sens global) de G; tout élément de G est contenu dans un tore maximal; le rang d'un sous-groupe U est $\leqq l$, il lui est égal si et seulement si U contient un tore maximal dans G. Tout lacet d'origine e (élément neutre) est homotope à un lacet tracé dans un tore maximal (*H.* Weyl, Math. Zeitschrift *24* (1925), 328–395), par conséquent le quotient G/U est simplement connexe si U est connexe de même rang que G; dans ce cas l'image réciproque $\overline{U}$ de U dans un revêtement $\bar{G}$ de G est alors aussi connexe; comme un tore maximal d'un produit direct est produit direct de tores maximaux des différents facteurs et que deux groupes de Lie compacts connexes localement isomorphes admettent un revêtement fini commun (Pontrjagin, Topological groups, Princeton 1946, Theorem 87), on voit que *les quotients de deux groupes de Lie compacts connexes localement isomorphes* G, G' *par des tores maximaux* T, T' *sont homéomorphes* et que pour étudier G/T on peut si l'on veut se borner au cas G simple. Plus généralement on montre que si U est un sous-groupe de $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k = G$ ayant même rang que G, alors

$$U = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_k \ (U_i \subset G_i\,,\ \text{rang}\ U_i = \text{rang}\ G_i),$$

ce qui ramène aussi l'étude de G/U (rang G = rang U) au cas où G est simple, mais nous n'aurons pas besoin de ce fait.

On sait que le rang de G est égal à la dimension d'un espace dont $H(G, R)$ est l'algèbre extérieure (H. Hopf, Comment. Math. Helv. 13 (1940–41), 119–143, pour d'autres démonstrations, cf. [22], [25]); nous en donnerons également une démonstration ci-dessous.

Pour étudier la cohomologie réelle de G/U (rang G = rang U), nous nous appuyerons sur les Théorème 19.1, 22.2 qui, joints au lemme 26.1, permettront d'obtenir aisément les résultats du §26.

LEMME 26.1. *Si T est un tore maximal du groupe de Lie compact connexe G, les nombres de Betti de G/T sont nuls pour les dimensions impaires.*

Démonstration par récurrence sur le rang l et la dimension n de G; pour $n = l$, l quelconque, il n'y a rien à prouver, supposons donc le lemme vrai pour U si rang $U \leqq$ rang G, dim $U <$ dim G et établissons le pour G; on peut supposer G semi-simple, sinon en effet G est localement isomorphe à $T^s \times U$ (rang $U = l - s$) et $G/T = U/T'$ T' maximal dans U. Le centre $C(G)$ de G est alors discret et on peut trouver $x \in G$ tel que $x \notin C(G)$, $x^2 \in C(G)$. Soit U la composante connexe de l'élément neutre e du normalisateur de x dans G; x étant contenu dans un tore maximal, le rang de U est égal à celui de G, mais comme $x \notin C(G)$, dim $U <$ dim G. Désignons par $L(G)$ l'algèbre de Lie de G, $L(U)$ la sous-algèbre correspondant à U et par I_a l'automorphisme de $L(G)$ induit par l'automorphisme $g \rightarrow aga^{-1}$; en particulier I_x est une involution et $L(U)$ est l'espace de tous les vecteurs fixes par I_x.

Nous montrerons tout d'abord que les nombres de Betti de G/U sont nuls pour les dimensions impaires; considérons G/U comme espace des classes à gauche gU, soit y le point représentant U, V l'espace tangent à G/U en y. On sait que l'on peut identifier V à un sous-espace V' de $L(G)$ supplémentaire de $L(U)$, invariant par les automorphismes I_u de manière à ce que l'automorphisme de V induit par la translation $gU \rightarrow ugU$ $(u \in U)$ devienne précisément I_u. ([8] No. I); chaque classe de cohomologie réelle de G/U peut être représentée par une forme multilinéaire alternée sur V, invariante par les translations de U, ou encore par une forme multilinéaire alternée sur V', invariante par les automorphismes I_u [8]. Par rapport à l'involution I_x, le supplémentaire invariant V' ne peut qu'être le sous-espace des vecteurs correspondant à la valeur propre -1, donc I_x est sur V' la symétrie par rapport à l'origine; une forme invariante non nulle doit donc être de degré pair et ainsi $H^i(G/U) = 0$ si i est impair.

Prenons maintenant comme tore maximal T de G un tore de U; dans l'algèbre spectrale sur R de $(G/T, G/U, U/T, p)$ on a $H_2 = H(G/U) \otimes H(U/T)$. Par hypothèse d'induction $H^i(U/T) = 0$ si i est impair, donc H_2 n'a que des éléments de degrés pairs, il en est de même de H_∞, et de $H(G/T)$; du reste ici $H_\infty = H_2$

puisque les différentielles, qui augmentent D de 1, sont forcément nulles, ce qui démontre le lemme pour G/T.

PROPOSITION 26.1. *L'homomorphisme* $\rho_R^*(T, G)$: $S_G \to S_T$ *est biunivoque.* $H(G/T)$ *est le quotient de* S_T *par l'idéal engendré par l'image de* S_G^+ *et est égal à sa sous-algèbre caractéristique.*

Le rang de G *est égal à la dimension de l'espace des primitifs de* $H(G, R)$; *si* $s_1 - 1, \cdots, s_l - 1$ *sont les degrés des éléments d'une base de ce dernier, le polynôme de Poincaré de* G/T *est*

$$P(G/T, t) = (1 - t^{s_1})(1 - t^{s_2}) \cdots (1 - t^{s_l})/(1 - t^2)^l.$$

Dans l'algèbre spectrale du Théorème 22.2 pour $M = R$, $U = T$, on a $H_2 = S_G \otimes H(G/T)$; désignons provisoirement par k la dimension de l'espace des primitifs (ou des éléments universellement transgressifs) de $H(G)$, par $x_1, \cdots, x_k$ une base de cet espace et soit $Dx_i = s_i - 1$; on sait que

$$S_G = R[y_1, \cdots, y_k] \ (Dy_i = Dx_i + 1 = s_i \text{ est pair})$$

il n'y a donc, vu le lemme 26.1 que des degrés pairs dans H_2, et ainsi $H_2 = H_\infty$; G/T est égal à sa sous-algèbre caractéristique (compte tenu du Théorème 22.2), ρ_R^* est biunivoque et $H(G/T) = S_T/(\rho^*(S_G^+))$, (Prop. 4.1).

La série de Poincaré de S_G est

$$P(S_G, t) = (1 - t^{s_1})^{-1}(1 - t^{s_2})^{-1} \cdots (1 - t^{s_k})^{-1}$$

celle de $H_2 = H_\infty = G(S_T)$, est (pour le degré total)

$$P(S_T, t) = (1 - t^2)^{-l} \qquad (l = \text{rang de } G)$$

donc

$$P(G/T, t) = (1 - s^{s_1}) \cdots (1 - s^{s_k})/(1 - t^2)^l.$$

Il reste à voir que $k = l$ $H(G/T)$ étant de dimension finie l'égalité précédente montre que $k \geqq l$; pour obtenir l'inégalité contraire, nous nous appuyerons sur le lemme

LEMME 26.2 *Soit* B *une algèbre graduée par des degrés positifs, anticommutative,* $J = (b_1, \cdots, b_k)$ *l'idéal engendré par* k *éléments homogènes de degrés* $s_1, \cdots, s_k$.

Si $b_1, \cdots, b_k$ *sont sans relations, la série de Poincaré de* B/J *est*

$$P(B/J, t) = P(B, t)(1 - t^{s_1}) \cdots (1 - t^{s_k})$$

sinon, $P(B/J, t)$ *majore strictement l'expression de droite.*

Nous laissons au lecteur la démonstration de ce lemme, qui se fait facilement par récurrence sur k, si l'on traduit "$b_1, \cdots, b_k$ sans relations" par l'ensemble des conditions: l'annulateur de l'image de b_i dans $B/(b_1, \cdots, b_{i-1})$ est nul $(i = 1, \cdots, k)$.

Si l'on revient à la Prop. 26.1, la formule obtenue pour $P(G/T, t)$ montre que $\rho^*(y_1), \cdots, \rho^*(y_k)$ sont sans relations car l'idéal de S_G^+ est $(\rho^*(y_1), \cdots, \rho^*(y_k))$. Cela n'est possible que si $k \leqq l$; en effet si $k > l$, le polynôme de Poincaré de $B = S_T/(\rho^*(y_1), \cdots, \rho^*(y_l))$ est

$$P(B, t) = (1 - t^{s_1}) \cdots (1 - t^{s_l})/(1 - t^2)^l$$

B est de dimension finie non nulle et l'annulateur de l'image de $\rho^*(y_{l+1})$ dans B ne peut être nul. Ainsi $k = l$, et de plus nous voyons que $\rho^*(y_1), \cdots, \rho^*(y_l)$ sont sans relations dans S_T.

Remarque. $\rho^*(T, G)$ est aussi biunivoque si G n'est pas connexe, T désignant un tore maximal du plus grand sous-groupe connexe G_0 de G. Considérons en effet les projections canoniques

$$E_G \to B_T \xrightarrow{\alpha} B_{G_0} \xrightarrow{\beta} B_G .$$

Par définition $\alpha^* = \rho^*(T, G_0)$, $\beta^* = \rho^*(G_0, G)$ et $\alpha^* \circ \beta^* = \rho^*(T, G)$; β fait de B_{G_0} un revêtement fini de B_G, de groupe G/G_0, et d'après un résultat connu sur les revêtements finis (B. Eckmann, Bull. Amer. Math. Soc. *55* (1949), 95–101), β^* applique S_G biunivoquement sur l'ensemble des éléments de S_G qui sont fixes par les opérations de G/G_0 ; α^* étant biunivoque d'après la Prop. 26.1, $\rho^*(T, G) = \alpha^* \circ \beta^*$ l'est aussi.

Theoreme 26.1. *Soit U un sous-groupe fermé du groupe de Lie compact G, ayant même rang que G.*

(a) *$\rho^*(U, G) : S_G \to S_U$, est biunivoque.*

(b) *Si G est connexe, $H(G/U)$ est le quotient de S_U par l'idéal de $\rho^*(S_G^+)$ et est égale à sa sous-algèbre caractéristique.*

(c) *Si G et U sont connexes et si $s_1 - 1, \cdots, s_l - 1$, resp. $r_1 - 1, \cdots, r_l - 1$, sont les degrés des éléments d'une base d'algèbre extérieure de $H(G)$, resp. $H(U)$, le polynôme de Poincaré de G/U est*

$$P(G/U, t) = \frac{(1 - t^{s_1})(1 - t^{s_2}) \cdots (1 - t^{s_l})}{(1 - t^{r_1})(1 - t^{r_2}) \cdots (1 - t^{r_l})} .$$

Démonstration. On a $\rho^*(T, G) = \rho^*(T, U) \circ \rho^*(U, G)$; $\rho^*(U, G)$ est donc biunivoque puisque $\rho^*(T, G)$ l'est (Prop. 26.1 et remarque). Dorénavant, G est supposé connexe.

Soit tout d'abord U connexe; $H(U/T)$ est égale à sa sous-algèbre caractéristique (Prop. 26.1), donc est totalement non homologue à zéro dans la fibration $(G/T, G/U, U/T, p)$ d'après le corollaire à la Prop. 18.3. L'algèbre spectrale de cette fibration est donc triviale (Prop. 4.1) et $P(G/T, t) = P(G/U, t) \cdot P(U/T, t)$, ce qui donne le polynôme de Poincaré de (c) et montre que $H^i(G/U) = 0$ pour i impair. Par conséquent l'algèbre spectrale du Théorème 22.2, qui relie $H_2 = S_G \otimes H(G/U)$ à S_U est triviale, d'où (b) pour U connexe.

Si U n'est pas connexe, soit U_0 son plus grand sous-groupe connexe, et considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} E_G & \longrightarrow & B_{U_0} & \xrightarrow{\alpha} & B_U & \xrightarrow{\beta} & B_G \\ \Big\uparrow{\scriptstyle \hat{\imath}} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \tilde{\imath}} & & \Big\uparrow{\scriptstyle i} & & \\ G & \longrightarrow & G/U_0 & \xrightarrow{\gamma} & G/U & & \end{array}$$

les flèches horizontales sont des projections, les flèches verticales des inclusions canoniques; $\tilde{\imath}$, resp. i, provient par passage au quotient à partir de $\hat{\imath}$, que l'on peut envisager comme homomorphisme d'espaces fibrés principaux de groupe U_0, resp. U, donc $\tilde{\imath}^*$ et i^* sont les homomorphismes caractéristiques (Prop. 18.4). Nous savons déjà que $\tilde{\imath}^*$ est sur et que son noyau est l'idéal de $\rho^*(S_G^+) = \alpha^* \circ \beta^*(S_G^+)$. D'autre part le théorème sur les revêtements finis évoqué dans la remarque à la Prop. 26.1 montre que α^* et γ^* sont biunivoques et ont comme images les invariants de U/U_0. En faisant des moyennes sur U/U_0 on en déduit aisément que i^* est sur et que son noyau est l'idéal de $\beta^*(S_G^+)$, ce qui établit (b) pour U non nécessairement connexe.

Remarque. La formule donnant $P(G/U, t)$ a été conjecturée par G. Hirsch, démontrée tout d'abord pour les groupes classiques par J. Leray (C. R. Acad. Sci. Paris *228* (1949), 1902–1904), pour les espaces symétriques par J. L. Koszul, enfin dans le cas général par Cartan-Koszul ([11], [22]), puis par J. Leray et l'auteur [25]; elle a été généralisée par J. Leray ([25], Théorème 2.2d). Une démonstration purement algébrique dans le cadre des algèbres de Lie a été donnée par C. Chevalley (non publié); la structure multiplicative de $H(G/U)$ est aussi étudiée dans ces Mémoires.

§27. Les invariants du groupe de Weyl

Soit T un tore maximal de G; nous supposons un voisinage de e de G rapporté à des coordonnées canoniques. Dans le groupe de recouvrement R^l de T on distingue le diagramme de G [33], formé de m familles de plans parallèles ($n = l + 2m$); c'est l'ensemble des points de R^l dont la projection dans T est un élément singulier de G, c'est à dire un élément dont le normalisateur est de dimension strictement plus grande que l. Soit $N(T)$ le normalisateur de T dans G, le quotient $\Phi(G) = N(T)/T$ est un groupe fini, *le groupe de Weyl de G*, il est *isomorphe* au groupe des automorphismes de T induits par des automorphismes intérieurs de G. Il opère aussi sur R^l en laissant le diagramme invariant et est engendré par les m symétries aux plans du diagramme passant par l'origine, symétrie étant entendu au sens d'une métrique euclidienne invariante par Φ, donnée essentiellement par la forme de Killing. Les opérations de Φ laissent aussi invariant le "réseau unité", image réciproque dans R^l de e, qui est isomorphe au groupe fondamental de T, donc aussi à $H_1(T, Z)$, puisqu'il est abélien. On en déduit une représentation fidèle de Φ comme groupe d'opérateurs de $H^1(T, Z)$ ou de $H^1(T, A) = H^1(T, Z) \otimes A$ que nous noterons $\Phi_A(G)$ ou Φ_A si aucune confusion n'est à craindre. Si $z_1, \cdots, z_l$ est une base de $H^1(T, Z)$, Φ_A détermine une représentation de Φ comme groupe d'automorphismes de $A[z_1, \cdots, z_l]$ que nous noterons $\Phi_A^*(G)$ ou Φ_A^*. Soit I_G la sous-algèbre des invariants de Φ_Z^*, c'est à dire des éléments fixes par toutes les opérations de Φ_Z^*. Il est clair que $I_G \otimes A$ est contenu dans l'ensemble des invariants de Φ_A^*, et qu'il lui est égal si $A = R$.

Dans le cas $A = R$, on peut naturellement interpréter $z_1, \cdots, z_l$ comme des variables réelles, coordonnées sur R^l, et Φ_R^* est la représentation de Φ comme groupe d'automorphismes de l'algèbre des polynômes à coefficients réel sur R^l; on peut aussi envisager $z_1, \cdots, z_l$ comme coordonnées sur l'algèbre de Lie de T et Φ_R^* comme groupe d'automorphismes des polynômes sur cette algèbre de Lie.

Si G n'est pas connexe, on peut aussi considérer $\Phi(G) = N(T)/T$; G_0 étant le plus grand sous-groupe connexe de G, l'inclusion de $N(T)$ dans G induit toujours un isomorphisme de $\Phi(G)/\Phi(G_0)$ sur G/G_0; $\Phi(G)$ n'opère pas forcément fidèlement sur T, c'est toutefois le cas si G est sous-groupe d'un groupe compact connexe de même rang.

Soit E_G un espace universel pour G; il l'est aussi pour T, $N(T)$ opère sur la fibration (E_G, B_T, T, p) et $\Phi = N(T)/T$ opère ainsi sur $H(T, A)$ et $H(B_T, A)$; sur $H^1(T, A)$ c'est la la représentation Φ_A; $N(T)$ opère aussi sur une couverture fine $p^{-1}(\mathcal{B}) \bigcirc \mathcal{E}$[21] définissant l'algèbre spectrale de p, transformant les modules S^p en eux-mêmes, $N(T)$ opère donc sur l'algèbre spectrale (H_r) de p; sur $H_2 = H(B_T, A) \otimes H(T, A)$, T opère identiquement et on obtient la représentation de Φ en le faisant opérer sur chacun des facteurs, comme il a été dit plus haut (cela résulte facilement de la définition des isomorphismes π^* et ι_b^* au §4); mais Φ commute à la différentielle d_2 qui établit un isomorphisme entre $H^1(T, A)$ et $H^2(B_T, A)$; on peut donc identifier ce dernier à $A[z_1, \cdots, z_l]$, ($z_1, \cdots, z_l$ base de $H^1(T, A)$) canoniquement, de manière à ce que Φ_A^* soit la représentation de Φ comme groupe d'opérateurs de $H(B_T, A)$ précédemment définie. Remarquons encore que $N(T)$ opère sur $H(B_T, A)$ en respectant les modules J^p, puisque J^p est l'image canonique des cocycles de S^p. Si en particulier A est un corps, on pourra établir un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $H(B_T, A)$ et $H_\infty = G(H(B_T, A))$ qui commute avec Φ_A^*.

$N(T)$ agit aussi sur la fibration (E_G, B_G, G, q) en laissant chaque fibre fixe; par suite Φ opère trivialement sur $H(B_G, A)$, et naturellement commute avec $\rho_A^*(U, G)$, dont l'image est ainsi formée d'invariants de Φ_A^*. Nous verrons que pour $A = R$, on obtient ainsi tous les invariants de Φ_R^*; cela résultera du lemme 27.1, dû à Leray [25].

LEMME 27.1. *Si G est connexe, $H(G/T)$ est l'espace d'une représentation de Φ équivalente à la représentation régulière.*

G/T étant envisagé comme espace des classes à gauche, il s'agit bien entendu de la représentation obtenue en faisant agir $N(T)$ par les translations à droite. Si $n \in N(T)$, $n \notin T$, cette translation est un homéomorphisme sans point fixe, et son nombre de Lefschetz est nul; si $n \notin T$, c'est l'identité et son nombre de

[21] **En prenant par exemple pour $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ les cochaînes d'Alexander-Spanier.**

Lefschetz est la caractéristique d'Euler-Poincaré de G/T, c'est à dire l'ordre de Φ^* ([20], p. 251). Mais les nombres de Betti de G/T en dimensions impaires sont nuls (Lemme 26.1), le nombre de Lefschetz est donc la trace de l'endomorphisme induit par n dans $H(G/T)$, la représentation de Φ ainsi obtenue a donc même caractère que la représentation régulière, elle lui est équivalente.

PROPOSITION 27.1. *Si T est un tore maximal du groupe de Lie compact G, l'image biunivoque de $\rho_R^*(T, G) : S_G \to S_T$ est formée de tous les invariants de Φ_R^*.*

Supposons tout d'abord G connexe. Dans l'algèbre spectrale de $(B_T, B_G, G/T, p)$,

$$H_2 = S_G \otimes H(G/T)$$

n'a que des degrés pairs et est donc l'algèbre terminale H_∞, qui est l'algèbre graduée à S_T convenablement filtrée. Il existe donc un isomorphisme entre $H_2 = H_\infty$ et S_T commutant avec Φ_R^* comme nous l'avons dit plus haut; d'autre part $\rho_R^*(T, G)$ est biunivoque et identifie S_G au sous-espace $S_G \otimes 1$ de S_T sur lequel par conséquent Φ_R^* agit trivialement. Ce sous-espace contient même tous les invariants de Φ_R^* puisque $1 \otimes H(G/T)$ est d'après le lemme 27.1 espace de la représentation régulière.

Si G n'est pas connexe, nous considérons les applications

$$B_T \xrightarrow{\alpha} B_{G_0} \xrightarrow{\beta} B_G$$

où G_0 est le plus grand sous-groupe connexe de G; $\rho_R^*(T, G_0) = \alpha^*$ applique S_G biunivoquement sur les invariants de $\Phi(G_0)$; $\beta^* = \rho_R^*(G_0, G)$ applique biunivoquement S_G sur les invariants de G/G_0; mais si $N(T)$ est le normalisateur de T dans G, l'inclusion $N(T) \subset G$ induit un isomorphisme de $\Phi(G)/\Phi(G_0)$ sur G/G_0, ces deux groupes étant envisagés comme groupes d'opérateurs de S_{G_0}. Par conséquent $\alpha^* \circ \beta^*$ est un isomorphisme de S_G sur les invariants de $\Phi(G)$.

PROPOSITION 27.2. (a) *Si G est connexe, l'anneau des polynômes sur l'espace de recouvrement R^l d'un tore maximal invariants par $\Phi(G)$ admet l générateurs sans relations.*

(b) *Si $m_1, \cdots, m_l$ sont des degrés de ces générateurs, $2m_1 - 1, \cdots, 2m_l - 1$ sont les degrés des éléments d'une base d'algèbre extérieure de $H(G)$ et le polynôme de Poincaré de G est*

$$P(G, t) = (1 + t^{2m_1-1})(1 + t^{2m_2-1}) \cdots (1 + t^{2m_l-1}).$$

C'est une conséquence immédiate du Théorème 19.1 et des Prop. 26.1 et 27.1.

REMARQUE. La Prop. 27.1a, dont nous avons donné une démonstration topologique, est due à C. Chevalley qui, plus généralement, l'a obtenue par voie algébrique pour tous les groupes finis engendrés par des symétries (non publié); la Prop. 27.2b a d'abord été établie par H. Cartan et Chevalley. Elle a le grand intérêt de ramener à l'étude des invariants d'un groupe fini la détermination du polynôme de Poincaré d'un groupe de Lie compact connexe.

PROPOSITION 27.3. *Soient (X, Y, U, p) un espace fibré principal compact, globalement et localement connexe, de groupe U de Lie compact, T un tore maximal de U.*

La projection : $X/T \to Y$ induit un isomorphisme de $H(Y)$ sur l'algèbre des éléments de $H(X/T)$ fixes par $\Phi(U)$.

Cette proposition est due à Leray ([25], Théor. 2.2a). La démonstration est tout à fait analogue à celle de la Prop. 27.1, qui est le cas particulier de la Prop. 27.3 où l'on prend $X = E_U$, $Y = B_U$ donc $X/T = B_T$, aussi ne la reproduirons-nous pas.

§28. Interprétation de l'homomorphisme ρ^*

Soient T un tore maximal de G, U un sous-groupe fermé de G, S un tore maximal de U; on peut supposer sans restreindre essentiellement la généralité que $S \subset T$. Si E_G est universel pour G, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E_G/T \arrow[d] & E_G/S \arrow[l] \arrow[d] \\ E_G/G & E_G/U \arrow[l] \end{tikzcd}$$

où les homomorphismes sont les projections, peut aussi d'écrire :

$$\begin{tikzcd} B_T \arrow[d] & B_S \arrow[l] \arrow[d] \\ B_G & B_U \arrow[l] \end{tikzcd}$$

et montre que

$$\rho_A^*(S, U) \circ \rho_A^*(U, G) = \rho_A^*(S, T) \circ \rho_A^*(T, G)$$

en particulier si $\rho_A^*(S, U)$ et $\rho_A^*(T, G)$ sont biunivoques et si l'on identifie par ces isomorphismes $H(B_U, A)$ et $\mathrm{H}(B_G, A)$ à des sous-algèbres de $H(B_S, A)$ et $H(B_T, A)$ respectivement, on voit que $\rho_A^*(U, G)$ se transporte en la restriction à $H(B_U, A)$ de $\rho_A^*(S, T)$. Etudions encore ce dernier. Le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} E_G \arrow[d] & E_G \arrow[l, "id."'] \arrow[d] \\ E_G/T & E_G/S \arrow[l] \end{tikzcd}$$

donne un homomorphisme de l'algèbre spectrale de $E_G \to E_G/T = B_T$ dans celle de $E_G \to E_G/S = B_S$; sur les termes H_2 on obtient un homomorphisme commutant à d_2 de $H(B_T, A) \otimes H(T, A)$ dans $H(B_S, A) \otimes H(S, A)$ qui est d'après le §4d le produit tensoriel de $\rho_A^*(S, T)$ et de $i^* : H(T, A) \to H(S, A)$.

Soient $x_1, \cdots, x_l$ et $y_1, \cdots, y_k$ des bases de $H^1(T, A)$ et $H^1(S, A)$. On a déjà dit que d_2 permettait d'identifier $H(B_T, A)$ et $H(B_S, A)$ à $A[x_1, \cdots, x_l]$ et $A[y_1, \cdots, y_k]$ respectivement, d'où la:

PROPOSITION 28.1. *Soient S un tore, sous-groupe d'un tore T, $y_1, \cdots, y_k$ une base de $H^1(S, A)$, $x_1, \cdots, x_l$ une base de $H^1(T, A)$.*

On peut identifier canoniquement $H(B_T, A)$ *et* $H(B_S, A)$ *à* $A[x_1, \cdots, x_l]$ *et* $A[y_1, \cdots, y_k]$ *respectivement de sorte que* $\rho_A^*(S, T)$ *devienne l'homorphisme de* $A[x_1, \cdots, x_l]$ *dans* $A[y_1, \cdots, y_k]$ *induit par l'homomorphisme* $i^* : H^1(T, A) \to H^1(S, A)$ *transposé de l'injection.*

Dans le cas de la cohomologie réelle, on peut considérer $R[x_1, \cdots, x_l]$ et $R[y_1, \cdots, y_k]$ comme les algèbres de polynômes sur le groupe de recouvrement R^l de T, resp. sur le sous-groupe R^k recouvrant S, ou encore comme les algèbres de polynômes sur l'algèbre de Lie $L(T)$ de T, resp. sur la sous-algèbre $L(S)$ correspondant à S; $\rho_R^*(S, T)$ est bien entendu la restriction à R^k des polynômes sur R^l. D'autre part, si T et S sont les tores maximaux de deux groupes $G \supset U$, $\rho_R^*(S, U)$ et $\rho_R^*(T, G)$ sont biunivoques, leurs images sont les invariants de $\Phi_R^*(U)$ et $\Phi_R^*(G)$ respectivement (Prop. 27.1); par conséquent:

Proposition 28.2. *Soit* U *un sous-groupe fermé du groupe de Lie compact* G, $S \subset T$ *des tores maximaux pour* U *et* G, R^l *l'espace de recouvrement de* T, R^k *le sous-espace recouvrant* S.

Si l'on identifie S_G *et* S_U *aux algèbres des polynômes à coefficients réels sur* R^l, *resp.* R^k, *invariants par* $\Phi_R^*(G)$, *resp.* $\Phi_R^*(U)$, *l'homomorphisme* $\rho_R^*(U, G) : S_G \to S_U$ *est la restriction à* R^k *des polynômes de* S_G.

On voit ainsi que la restriction d'un invariant de $\Phi(G)$ est un invariant de $\Phi(U)$; cela pouvait être prévu a priori pour G et U connexes, car tout automorphisme de R^k donné par un élément de $\Phi(U)$ est aussi induit par un élément de $\Phi(G)$, (*voir* J. de Siebenthal, Comm. Math. Helv. *25* (1951), 210–256, §6, Théorème 5).

On a vu que l'homomorphisme $\rho_R^*(U, G)$, (U, G connexes), déterminait complètement la cohomologie réelle de G/U. La Prop. 28.2 montre qu'il ne dépend que de phénomènes locaux ou infinitésimaux; en effet, le groupe Φ est engendré par les symétries aux plans du diagramme passant par l'origine et ρ^* est déterminé par des plans et par la situation de R^k dans R^l; en termes d'algèbres de Lie, ρ_R^* ne dépend que des transformations infinitésimales de $L(S)$, $L(T)$ singulières dans $L(U)$, resp. $L(G)$ et de la situation de $L(S)$ dans $L(T)$. Ce sont des notions infinitésimales. On retrouve le résultat classique de E. Cartan [8], affirmant que la cohomologie réelle de (G/U) est déterminée par des données locales.

La Prop. 27.2 traduit pour les groupes de Lie un phénomène analogue; elle explique notamment pourquoi des groupes qui ont "même groupe Φ", c'est à dire dont les diagrammes coincident dans un voisinage de l'origine, ont même polynôme de Poincaré pour les coefficients réels; c'est le cas de $\mathbf{Sp}(n)$ et $\mathbf{SO}(2n + 1)$.

De ce point de vue, il faudrait pour traiter la cohomologie entière faire intervenir le diagramme total, et aussi le réseau unité qui permet de distinguer entre groupes localement isomorphes (cf. [33], §4), mais cela paraît difficile et je ne connais que peu de résultats dans cet ordre d'idées.

Chapitre VII. Cohomologie Entiere et Mod p de Quelques Espaces Homogenes

Les résultats de ce Chapitre sont très fragmentaires et pour la plupart relatifs au cas d'égalité des rangs. On établira ici surtout des conditions suffisantes pour que l'on ait mod. p des phénomènes analogues à ceux qui ont été décrits au §26. Comme applications nous étudierons dans le §31 la cohomologie de quelques espaces homogènes classiques.

Notations. G groupe de Lie compact connexe de rang l; U sous-groupe fermé connexe de G, T tore maximal de G.

$P_p(X, t)$ polynôme de Poincaré de X pour la cohomologie dans un corps de caractéristique p.

$H^+(X, A)$ ensemble des éléments de degrés > 0 de $H(X, A)$.

$S(x_1, \cdots, x_k)$: anneau des fonctions symétriques de $x_1, \cdots, x_k$ à coefficients entiers.

$\rho_p^*(U, G)$ est comme toujours l'homomorphisme canonique de $H(B_G, K_p)$ dans $H(B_U, K_p)$, $\Phi_p^*(G)$ la représentation de Φ comme groupe d'automorphismes de $H(B_T, K_p)$ définie au §27, I_G est l'anneau des invariants de $\Phi_Z^*(G)$.

§29. Le quotient d'un groupe compact par un tore maximal

Notre premier but sera de vérifier que si G est un groupe simple classique ou de l'un des types $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{F}_4$, le quotient G/T de G par un tore maximal est sans torsion; cela vaudra donc aussi lorsque G est localement isomorphe à un produit direct de tores par des groupes simples des types précités (cf. §26, début). En ce qui concerne les quotients $\mathbf{E}_i/T$ ($i = 6, 7, 8$), je ne sais rien; la méthode récurrente utilisée ici ne permet pas actuellement d'aborder l'étude de ces espaces car il n'y a pas d'espace homogène de $\mathbf{E}_i$ dont on connaisse la cohomologie entière. A tout hasard, signalons une propriété commune aux G/T et à certains espaces homogènes de $\mathbf{U}(n)$ sans torsion (cf. §31, No. 1), mais sans savoir si elle est en relations avec la question topologique qui nous occupe;

G/T admet une structure de variété complexe invariante par les homéomorphismes de G.

Il suffit de le voir pour G semi-simple; or on vérifie immédiatement que G/T est le quotient de l'extension complexe de G par le sous-groupe résoluble dont l'algèbre de Lie a été décrite par K. Iwasawa (Annals of Math. *50* (1949), 507–558, démonstration du lemme 3.11, p. 527–528, il s'agit de l'algèbre $\tilde{L}$). G/T est donc le quotient d'un groupe de Lie à paramètres complexes par un sous-groupe au sens de la structure de groupe de Lie complexe, d'où notre assertion.

LEMME 29.1. *Soit S un tore maximal de U. Si G/U et U/S sont sans p-torsion (resp. sans torsion), G/S est sans p-torsion (sans torsion).*

$H(U/S, R)$ est égal à sa sous-algèbre caractéristique (Prop. 26.1), donc U/S est totalement non homologue à zéro dans G/S pour la cohomologie réelle (Cor. à la Prop. 18.3) et

$$P_0(G/S, t) = P_0(G/U, t) \cdot P_0(U/S), t)$$

$P_p(G/S, t)$ majore naturellement $P_0(G/S, t)$, mais il minore le polynôme de Poincaré (pour le degré total) du terme H_2 de l'algèbre spectrale sur K_p de $(G/S, U/S, U/S, p)$ qui est $P_p(G/U, t) \cdot P_p(U/S, t)$; mais

$$P_p(G/U, t)P_p(U/S, t) = P_0(G/U, t)P_0(U/S, t) = P_0(G/S, t)$$

d'après nos hypothèses. Ainsi $P_p(G/S, t) = P_0(G/S, t)$ et G/S est sans p-torsion. Le lemme pour Z s'en déduit aussitôt.

REMARQUE. En fait la démonstration précédente montre plus généralement que si dans l'espace fibré (X, Y, F, p) F est totalement non homologue à zéro pour les coefficients réels et si Y et F sont sans p-torsion, X est sans p-torsion, cela pour autant que la théorie de Leray s'applique, que les groupes de cohomologie entière de X, Y, F soient de type fini et que $H_2 = H(Y, K_p) \otimes H(F, K_p)$.

LEMME 29.2. *Soit G de rang l, U de rang $l - 1$, S un tore maximal de U, T un tore maximal de G contenant S.*

Si G/S et U/S sont sans torsion, G/T est sans torsion.

G/T est toujours de dimension paire (*voir*, par ex. [33], p. 359) et orientable; d'après la dualité, les groupes de torsion $H^i(G/T, Z)$ et $H^j(G/T, Z)$ sont isomorphes pour $i + j = n - 1$. Si Tors. $H(G/T, Z) \neq 0$ il y a donc un plus petit indice j *impair* tel que Tors. $H^j(G/T, Z) \neq 0$.

On peut supposer $T \supset S$ et T/S est un cercle; dans l'algèbre spectrale sur Z de $(G/S, G/T, T/S, p)$ on a puisque T/S est sans torsion

$$H_2 = H(G/T, Z) \otimes H(T/S, Z).$$

Les degrés-fibres étant 0 et 1, seule d_2 peut ne pas être nulle et $H_3 = H_\infty$; si x est un générateur de $H^1(T/S, Z)$ et si $y \otimes 1 = d_2(1 \otimes x)$ $(y \in H^2(G/T, Z))$, p^* a comme image le quotient de $H(G/T, Z)/(y)$ de $H(G/T, Z)$ par l'idéal de y. Vu le lemme 26.1 et l'hypothèse de minimum faite sur j, $H^k(G/T, Z) = 0$ pour k impair $< j$, donc

$$(y) \cap H^j(G/T, Z) = 0$$

et p^* applique $H^j(G/T, Z)$ isomorphiquement dans G/S; ainsi G/S a de la torsion, ce qui contredit notre hypothèse; donc Tors. $H^j(G/T, Z) = 0$.

PROPOSITION 29.1. *Si G est isomorphe à un groupe classique ou encore à $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{F}_4$, son quotient par un tore maximal est sans torsion.*

Dans cette démonstration, $\mathbf{T}^n$ désigne un tore de dimension n.

(a) $G = \mathbf{U}(n)$ *ou* $\mathbf{SU}(n)$. $\mathbf{U}(n)$ est de rang n; pour $n = 1$, $\mathbf{U}(1) = \mathbf{T}^1$, il n'y a rien à démontrer; supposons la prop. vraie pour $\mathbf{U}(n)$, elle l'est donc aussi pour $\mathbf{U}(n) \times \mathbf{T}^1$. On sait que $\mathbf{U}(n + 1)/\mathbf{U}(n) \times \mathbf{T}^1$ est l'espace projectif complexe à n dimensions complexes, qui est sans torsion; il suffit d'appliquer le lemme 29.1.

$\mathbf{SU}(n)$ est de rang $n - 1$ et $\mathbf{SU}(n)/\mathbf{T}^{n-1} = \mathbf{SU}(n) \times \mathbf{T}^1/\mathbf{T}^n = \mathbf{U}(n)/\mathbf{T}^n$ est aussi sans torsion.

(b) $G = \mathbf{Sp}(n)$. La Prop. est vraie pour $\mathbf{Sp}(1) = \mathbf{SU}(2)$; on procède ensuite par récurrence comme précédemment en utilisant le fait que $\mathbf{Sp}(n + 1)/\mathbf{Sp}(n) \times \mathbf{Sp}(1)$ est l'espace projectif quaternionien à n dimensions quaternioniennes et est sans torsion.

(c) $G = \mathbf{SO}(n)$. $\mathbf{SO}(2n)$ et $\mathbf{SO}(2n + 1)$ sont de rang n. La Prop. est vraie pour $\mathbf{SO}(3)/\mathbf{T}^1 = \mathbf{SU}(2)/\mathbf{T}^1$ et $\mathbf{SO}(4)/\mathbf{T}^2 = \mathbf{SO}(3)/\mathbf{T}^1 \times \mathbf{SO}(3)/\mathbf{T}^1$. On procède ensuite par récurrence. Pour passer de $\mathbf{SO}(2n)$ à $\mathbf{SO}(2n + 1)$ on remarque que $\mathbf{SO}(2n + 1)/\mathbf{SO}(2n) = \mathbf{S}_{2n}$ et on applique le lemme 29.1; pour passer de

$\mathbf{SO}(2n+1)$ à $\mathbf{SO}(2n+2)$ on part de $\mathbf{SO}(2n+2)/\mathbf{SO}(2n+1) = S_{2n+1}$; le lemme 29.1 montre que $\mathbf{SO}(2n+2)/\mathbf{T}^n$ est sans torsion, $\mathbf{T}^n$ étant un tore maximal de $\mathbf{SO}(2n+1)$; on applique ensuite le lemme 29.2.

(d) $G = \mathbf{G}_2$. Il est de rang deux. On applique le lemme 29.1 à la fibration bien connue $\mathbf{G}_2/\mathbf{SU}(3) = \mathbf{S}_6$ (nombres de Cayley purement imaginaires), en tenant compte du fait que $\mathbf{SU}(3)/\mathbf{T}^2$ est sans torsion.

(e) $G = \mathbf{F}_4$. Soit **Spin** (9) le groupe de recouvrement universel de $\mathbf{SO}(9)$; **Spin** $(9)/\mathbf{T}^4 = \mathbf{SO}(9)/\mathbf{T}^4$ est sans torsion d'après c); l'espace $\mathbf{F}_4/$**Spin** (9) a déjà été étudié par E. Cartan (Annales de l'Ecole Norm. Sup. *44* (1927), 345–467), c'est un espace homogène de rang un, ce qui signifie qu'en général il ne passe qu'une seule géodésique par deux points (dans une métrique riemannienne invariante par $\mathbf{F}_4$); l'ensemble des points qui peuvent être reliés à un point P par plus d'une géodésique (la variété antipodique de P au sens de E. Cartan) est $\mathbf{S}_8$; $\mathbf{F}_4/$**Spin** (9) admet donc une décomposition cellulaire formée de deux cellules: une sphère $\mathbf{S}_8$ et une boule ouverte à 16 dimensions. Il en résulte, pour la cohomologie entière de $\mathbf{F}_4/$**Spin** (9)

$$H^0 = H^8 = H^{16} = Z, H^i = 0 \qquad (i \neq 0, 8.16)$$

et en particulier que Tors. $H(\mathbf{F}_4/\mathbf{Spin}\ (9), Z) = 0$ on peut appliquer le lemme 29.1.

PROPOSITION 29.2. (a) *Si G et G/T sont sans p-torsion, $\rho_p^*(T, G)$ est biunivoque. $H(G/T, K_p)$ est le quotient de $H(B_T, K_p)$ par l'idéal de $\rho_p^*(H^+(B_G, K_p))$ et est égal à sa sous-algèbre caractéristique. L'image de $\rho_p^*(T, G)$ est $I_G \otimes K_p$.*

(b) *Si G et G/T sont sans torsion, on a une proposition analogue pour les coefficients entiers.*

(a) $H(B_G, K_p)$ est une algèbre de polynômes à l variables de degrés pairs (Prop. 7.2 et Théorème 19.1); le lemme 26.1 et l'hypothèse montrent que $H^i(G/T, K_p) = 0$ si i est impair. L'algèbre spectrale de $(B_T, B_G, G/T, p)$ du Théorème 22.2 qui mène de $H_2 = H(B_G, K_p) \otimes H(G/T, K_p)$ à $H(B_T, K_p)$ est donc triviale; la Prop. 4.1 donne alors (a), à l'exception de la dernière assertion.

Le Théorème 19.1 montre ici que $H(B_G, R)$ et $H(B_G, K_p)$ ont même série de Poincaré, $H(B_G, Z)$ est donc sans p-torsion (car $H(B(n, G), Z)$ est de type fini, cf. dém. du Théorème 19.1), et $H(B_G, K_p) = H(B_G, Z) \otimes K_p$. L'image de $\rho_Z^*(T, G)$ étant évidemment contenue dans I_G, celle de $\rho_p^*(T, G)$ est contenue dans $I_G \otimes K_p$.

Soit $I_G^k = H^k(B_T, Z) \cap I_G$; $H^k(B_T, Z)$ est libre, il en résulte immédiatement que I_G^k est un *facteur direct* dans $H^k(B_T, Z)$. Le nombre s_k d'éléments d'une base de I_G^k est donc égal à la dimension de $I_G \otimes K_p \subset H(B_T, K_p)$ ou à celle de $I_G^k \otimes R \subset H(B_G, R)$; or $I_G^k \otimes R$ est naturellement l'ensemble des invariants de $\Phi_R^*(G)$ contenus dans $H^k(B_T, R) = H^k(B, Z) \otimes R$, il est par conséquent de même dimensions que $H^k(B_G, R)$, d'après la Prop. 27.1; nous obtenons ainsi

$$s_k = \dim I_G^k \otimes K_p = \dim I_G^k \otimes R = \dim H^k(B_G, R) = \dim H^k(B_G, K_p)$$

s_k est égal à la dimension de l'image de $H^k(B_G, K_p)$ par $\rho_p^*(T, G)$ qui est biunivoque, comme nous l'avons déjà montré, d'où

$$I_G \otimes K_p = \rho_p^*(U, G)(H(B_G, K_p))$$

puisque le terme de gauche contient celui de droite.

(b) Si G est sans torsion, $H(B_G, Z)$ est sans torsion (Théorème 19.1) et si de plus G/T est sans torsion $H_2 = H(B_G, Z) \otimes H(G/T, Z)$ est algèbre terminale de l'algèbre spectrale de $(B_T, B_G, G/T, p)$, (tous les degrés sont pairs), ce qui établit (b), mis à part l'égalité $I_G = \rho_Z^*(H(B_G, Z))$.

Le deuxième terme est en tout cas contenu dans le 1er, et comme I_G est facteur direct dans $H(B_T, Z)$ on peut trouver une base de $H^k(B_T, Z)$, $u_1, \cdots, u_s$, $v_1, \cdots, v_t$ telle que $u_1, \cdots, u_s$ soit une base de I_G^k et que $m_i u_i$ (m_i entier) soit une base de $\rho_Z^*(H^k(B_G, Z))$. Mais d'après (a) on a

$$I_G^k \otimes K_p = \rho_p^*(H^k(B_G, K_p)) = \rho_Z^*(H^k(B_G, Z)) \otimes K_p \qquad (p \text{ quelconque})$$

ce qui montre que $m_i = \pm 1$ $(i = 1, \cdots, s)$ et que $I_G = \rho_Z^*(H(B_G, Z))$.

Exemples. (1) $G = \mathbf{U}(n)$ et $\mathbf{U}(n)/T$ sont sans torsion, Φ est le groupe des permutations de $x_1, \cdots, x_n$ (base de $H^1(T, Z)$ ou de $H^2(B_{\mathbf{U}(n)}, Z)$); I_G est l'anneau des fonctions symétriques de $x_1, \cdots, x_n$; (si on les considère comme éléments de $H(B_{\mathbf{U}(n)}, Z)$, il faut naturellement donner le degré 2 aux variables x_i).

(2) $G = \mathbf{Sp}(n)$ et $\mathbf{Sp}(n)/T$ sont sans torsion; Φ est le groupe des permutations de $x_1, \cdots, x_n$ accompagnées d'un nombre quelconque de changements de signes et I_G est l'anneau des fonctions symétriques en $x_1^2, \cdots, x_n^2$.

(3) $G = \mathbf{SO}(2n + 1)$ est sans p-torsion pour $p \geqq 3$, (Prop. 10.4), $\mathbf{SO}(2n + 1)/T$ est sans torsion. Le groupe Φ est le même que pour $\mathbf{Sp}(n)$. Si $p > 2$, ρ_p^* identifie donc $H(B_{\mathbf{SO}(2n+1)}, K_p)$ à l'algèbre des fonctions symétriques de $x_1^2, \cdots, x_n^2$ contenues dans $K_p[x_1, \cdots, x_n]$.

(4) $G = \mathbf{SO}(2n)$ est sans p-torsion pour $p \geqq 3$; $\mathbf{SO}(2n)/T$ est sans torsion. Le groupe Φ est le groupe des permutations de $x_1, \cdots, x_n$ accompagnées d'un nombre pair de changements de signes. $I_{\mathbf{SO}(2n)}$ est l'anneau engendré par les $n - 1$ premières fonctions symétriques élémentaires en $x_1^2, \cdots, x_n^2$ et par le monôme $x_1 \cdots x_n$; ρ_p^* identifie $H(B_{\mathbf{SO}(2n)}, K_p)$ à $I_{\mathbf{SO}(2n)} \otimes K_p$, $(p \pm 2)$.

Remarques. (1) Soit $\sigma_i(x_1, \cdots, x_n)$ la ième fonction symétrique élémentaire de $x_1, \cdots, x_n$. De l'exemple 1) on déduit que la classe de Chern C_{2i} de degré $2i$ de la grassmannienne complexe s'identifie à $\pm\sigma_i + P(\sigma_1, \cdots, \sigma_{i-1})$. En fait on verra dans un travail ultérieur de J. P. Serre et l'auteur que l'on a $C_{2i} = \sigma_i$, (après choix convenable d'une base de $H^1(T, Z)$).

(2) L'hypothèse G sans p-torsion n'est pas superflue dans ce qui précède; par exemple l'image de $\rho_2^*(T, \mathbf{SO}(n))$ n'est pas biunivoque puisque $H(B_{\mathbf{SO}(n)}, K_2)$ contient des éléments de degrés impairs (Prop. 23.1). L'algèbre spectrale de $(B_T, B_{\mathbf{SO}(n)}, \mathbf{SO}(n)/T, p)$ sur K_2 n'est pas triviale, car si elle l'était on aurait $P_0(B_{\mathbf{SO}(n)}, t) = P_2(B_{\mathbf{SO}(n)}, t)$, et $H(\mathbf{SO}(n)/T, K_2)$ n'est pas égal à sa sous-algèbre caractéristique.

(3) Même si G et G/T sont sans torsion, $I_G \otimes K_p$ n'est pas forcément l'ensemble des invariants de Φ_p^*; par exemple pour $\mathbf{Sp}(n)$, $I_G \otimes K_2$ est l'ensemble

des fonctions symétriques en $x_1^2, \cdots, x_n^2$ tandis que les invariants de Φ_2^* sont les fonctions symétriques en $x_1, \cdots, x_n$. Cela signifie que l'espace des vecteurs fixes par Φ dans $H(\mathbf{Sp}(n)/T, K_2)$ est de dimension >1 (voir démonstration de la Proposition 27.1).

PROPOSITION 29.3. *Soit (X, Y, G, p) un espace fibré principal compact globalement et localement connexe. Si G et G/T sont sans p-torsion (resp. sans torsion), G/T est totalement non homologue a zéro* mod p *(resp. pour les coefficients entiers) dans X/T.*

Si Y et X/T ont des cohomologies entières de type fini, ils sont simultanément avec ou sans p-torsion (resp. torsion).

C'est une conséquence du Corollaire à la Prop. 18.3 et de la Prop. 29.2. Pour obtenir la dernière assertion il suffit de comparer les polynômes de Poincaré en caractéristiques zéro et p de Y, X/T.

§30. Quotient d'un groupe par un sous-groupe de même rang

PROPOSITION 30.1. *Soit U un sous-groupe de G ayant même rang que G, T un tore maximal commun.*

Si U, G/T, U/T sont sans p-torsion (resp. sans torsion), G/U est sans p-torsion (resp. sans torsion).

On applique la Prop 29.3 à la fibration $(G, G/U, U, p)$, (on remplace donc X par G, G par U).

Dans cet énoncé, la torsion de G n'intervient pas et, en tenant compte de la Prop. 29.1, on peut dire "qu'en général", G/U est sans p-torsion lorsque U est sans p:torsion et que rang U = rang G. Ces deux hypothèses ne sont naturellement pas superflues comme le montrent les exemples $\mathbf{Sp}(2)/\mathbf{Sp}(1) = \mathbf{V}_{5,2}$ et $\mathbf{G}_2/\mathbf{SO}(4)$, (pour ce dernier, cf. C.R. Acad. Sci. Paris 230 (1950), 1378-80).

PROPOSITION 30.2. *Soit U un sous-groupe de G ayant même rang que G, T un tore maximal commun.*

Si G, U, G/T, et U/T sont sans p-torsion (resp. sans torsion), $\rho_p^*(U, G)$, (resp. $\rho_Z^*(U, G)$), est biunivoque, $H(G/U, K_p)$, (resp. $H(G/U, Z)$) est le quotient de $H(B_U, K_p)$, (resp. $H(B_U, Z)$), par l'idéal de $\rho_p^*(H^+(B_G, K_p))$, (resp. de $\rho_Z^*(H^+(B_G, Z))$), et est égal à sa sous-algèbre caractéristique.

D'après le Théorème 19.1, la formule de Hirsch (Théorème 26.1), et la Prop. 30.1, on sait que $H(B_G, K_p)$ et $H(G/U, K_p)$ n'ont d'éléments non nuls qu'en degrés pairs. L'algèbre spectrale de $(B_U, B_G, G/U, p)$ sur K_p est donc triviale; on applique la Prop. 4.1, ce qui établit notre proposition pour K_p. Même démonstration en cohomologie entière.

A l'aide du corollaire à la Prop. 18.3 on en déduit la Prop. 30.3, qui généralise, la Prop. 29.3 et, tout au moins pour U connexe, le Théorème 2.2c de [25][22]:

PROPOSITION 30.3. *Soit (X, Y, G, p) un espace fibré principal compact globalement et localement connexe. Si G, U, G/T et U/T sont sans p-torsion (resp. sans*

[22] Ce Théorème est lui-même ici conséquence du Théor. 26.1 b et du corollaire à la Prop. 18.3.

torsion), G/U est totalement non homologue à zéro mod p *(resp. pour la cohomologie entière) dans X/U.*

Si Y et X/U ont des cohomologies entières de type fini, ils sont simultanément avec ou sans p-torsion (resp. avec ou sans torsion).

§31. Etude de quelques cas particuliers

Dans les énoncés qui suivent on donnera le degré deux aux variables $x_1, \cdots, x_n$.

(31.1) *Les espaces* $\mathbf{W}(n_1, \cdots, n_k) = \mathbf{U}(n)/\mathbf{U}(n_1) \times \cdots \times \mathbf{U}(n_k)$,

$$(n_1 + \cdots + n_k = n).$$

$\mathbf{W}(n_1, \cdots, n_k)$ est la variété "de drapeaux" dont l'élément générateur est formé de $k - 1$ sous-espaces de C^n emboîtés, le premier de dimension n_1, le 2ème de dimension $n_1 + n_2, \cdots$, le $k - 1$-ème de dimension $n_1 + \cdots + n_{k-1}$. Pour $k = 2$, on retrouve les grassmanniennes complexes. $\mathbf{W}(n_1, \cdots, n_k)$ est un quotient G/U, où rang G = rang U, et où G, U, G/T et G/T sont sans torsion (Prop. 9.1 et 29.1). On déduit alors de la Prop. 30.2 la Prop. 31.1, qui, au point de vue additif, est due à C. Ehresmann [14]:

PROPOSITION 31.1. $\mathbf{W}(n_1, \cdots, n_k)$ *est sans torsion, son polynôme de Poincaré* mod p *est donné par la formule de Hirsch.*

$H(\mathbf{W}(n_1, \cdots, n_k), Z)$ est isomorphe au quotient de

$$S(x_1, \cdots, x_{n_1}) \otimes S(x_{n_1+1}, \cdots, x_{n_1+n_2}) \otimes \cdots \otimes S(x_{n_1+\cdots+n_{k-1}+1}, \cdots, x_n)$$

par l'idéal engendré par $S^+(x_1, \cdots, x_n)$.

(31.2.) $\mathbf{K}(n_1, \cdots, n_k) = \mathbf{Sp}(n)/\mathbf{Sp}(n_1) \times \cdots \times \mathbf{Sp}(n_k)$, $(n_1 + \cdots + n_k = n)$.

C'est l'analogue quaternionnien de $\mathbf{W}(n_1, \cdots, n_k)$, on peut de nouveau appliquer la Prop. 30.2; il suffit dans la Prop. précédente de remplacer $\mathbf{W}(n_1, \cdots, n_k)$ par $\mathbf{K}(n_1, \cdots, n_k)$ et x_i par x_i^2.

(31.3.) $\mathbf{F}_n = \mathbf{SO}(2n)/\mathbf{U}(n)$.

Cette variété joue comme on sait un rôle dans l'étude des structures presque complexes des variétés différentiables (*voir* [18], Nos. 8.9.10, [31], No. 41), c'est un quotient G/U où rang G = rang $U = n$ et où U, G/T et U/T sont sans torsion; $\mathbf{F}_n$ est donc sans torsion d'après la Prop. 30.1; la formule de Hirsch montre qu'au point de vue *additif*, $\mathbf{F}_n$ a la cohomologie entière de

$$\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_4 \times \cdots \times \mathbf{S}_{2n-2},$$

résultat dû à Ehresmann [14]. On peut aussi l'obtenir plus directement par récurrence sur n en considérant l'algèbre spectrale de la fibration

$$(\mathbf{F}_n, \mathbf{S}_{2n-2}, \mathbf{F}_{n-1}, p),$$

(voir [18], [31]), qui est alors triviale (tous les degrés sont pairs).

Au point de vue multiplicatif, deux cas sont à distinguer. Si $p \neq 2$, $\mathbf{SO}(2n)$ est sans p-torsion, la Prop. 30.2 s'applique. Si $p = 2$ considérons l'algèbre spectrale sur K_2 de $(\mathbf{SO}(2n), \mathbf{F}_n, \mathbf{U}(n), p)$, le terme $H_2 = H(\mathbf{F}_n, K_2) \otimes H(\mathbf{U}(n), K_2)$ a pour le degré total le polynôme de Poincaré de $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2 \times \cdots \times \mathbf{S}_{2n-2} \times \mathbf{S}_{2n-1}$, c'est celui de $\mathbf{SO}(2n)$, (Prop. 10.3), donc celui de l'algèbre terminale; l'algèbre spectrale est par conséquent triviale, $\mathbf{U}(n)$ est totalement non homologue à zéro mod 2 dans $\mathbf{SO}(2n)$, p^* applique $H(\mathbf{W}_n, K_2)$ biunivoquement dans $H(\mathbf{SO}(2n), K_2)$. On peut utiliser le §21 et on obtient finalement:

Proposition 31.2. *La variété* $\mathbf{F}_n = \mathbf{SO}(2n)/\mathbf{U}(n)$ *est sans torsion et a au point de vue additif même cohomologie entière que* $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_4 \times \cdots \times \mathbf{S}_{2n-2}$.

Si $p \neq 2$, $H(\mathbf{F}_n, K_p)$ *est égale à sa sous-algèbre caractéristique et est isomorphe au quotient de* $S(x_1, \cdots, x_n)$ *par l'idéal engendré par les* $n - 1$ *premières fonctions symétriques élémentaires de* $x_1^2, \cdots, x_n^2$ *et par le monôme* $x_1 \cdots x_n$.

$\mathbf{U}(n)$ *est totalement non homologue à zéro* mod 2 *dans* $\mathbf{SO}(2n)$; $H(\mathbf{F}_n, K_2)$ *est appliqué isomorphiquement dans* $H(\mathbf{SO}(2n), Z_2)$, *sur la sous-algèbre engendrée par les éléments primitifs de degrés* $2, 4, \cdots, 2n - 2$.

Remarque. D'après la Prop. 20.2, les primitifs de $H(\mathbf{U}(n), K_2)$ sont images par i^*: $H(\mathbf{SO}(2n), K_2) \to H(\mathbf{U}(n), K_2)$ des primitifs de degrés $1, 3, \cdots, 2n - 1$ de $H(\mathbf{SO}(2n), K_2)$. Les Sq^i indiqués dans la formule (10.6) pour $H(\mathbf{SO}(2n), K_2)$, et qui sont valables lorsque les générateurs h_i sont universellement transgressifs (donc primitifs, Prop. 21.1) déterminent donc les Sq^i de $\mathbf{U}(n)$ et ceux de $\mathbf{F}_n$.

(31.4.) $$\mathbf{X}_n = \mathbf{U}(2n)/\mathbf{Sp}(n).$$

Cette variété joue le rôle de $\mathbf{F}_n$ dans l'étude des structures presque-quaternioniennes des variétés analytiques complexes ([18], No. 11).

Proposition 31.3. $\mathbf{Sp}(n)$ *est totalement non homologue à zéro dans* $\mathbf{U}(n)$ *pour la cohomologie entière.*

$H(\mathbf{X}_n, Z) = H(\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_5 \times \cdots \times \mathbf{S}_{4n-3}, Z)$ *est appliquée isomorphiquement par* p^*: $H(\mathbf{X}_n, Z) \to H(\mathbf{U}(2n), Z)$ *sur une sous-algèbre engendrée par des éléments primitifs.*

Il suffit, vu les Prop. 4.1 et 21.1, d'établir la 1ère assertion et pour cela de voir que, $\mathbf{T}^n \subset \mathbf{T}^{2n}$ désignant des tores maximaux de $\mathbf{Sp}(n)$ et $\mathbf{U}(2n)$, $\rho_Z^*(\mathbf{T}^n, \mathbf{T}^{2n})$ induit un homomorphisme de $I_{\mathbf{U}(2n)}$ *sur* $I_{\mathbf{Sp}(n)}$, (Prop. 23.1, corollaire et §28).

Soient $(s_1, \cdots, s_n, s_1', \cdots, s_n')$ et $(u_1, \cdots, u_n)$ des bases de $H_1(\mathbf{T}^{2n}, Z)$ et $H_1(\mathbf{T}^n, Z)$, $(x_1, \cdots, x_n, x_1', \cdots, x_n')$ et $(y_1, \cdots, y_n)$ les bases duales de

$$H^1(\mathbf{T}^{2n}, Z) \quad \text{et} \quad H^1(\mathbf{T}^n, Z).$$

Utilisant les renseignements indiqués dans [33], §3, on voit sans difficulté que l'on a

$$I_{\mathbf{U}(2n)} = S(x_1, \cdots, x_n, x_1', \cdots, x_n'); \qquad I_{\mathbf{Sp}(n)} = S(y_1^2, \cdots, y_n^2)$$

et que l'injection i est définie par $i(u_j) = s_j - s_j'$ $(j = 1, \cdots, n)$; dualement on obtient $i^*(x_j) = i^*(-x_j') = y_j$ $(j = 1, \cdots, n)$; l'image par $\rho_Z^*(T^n, T^{2n})$ d'un polynôme en $x_1, \cdots, x_n'$ se trouve donc en y remplaçant x_j et $-x_j'$ par y_j ; il est alors clair que l'image de $I_{\mathbf{U}(2n)}$ est $I_{\mathbf{Sp}(n)}$.

REMARQUE. Les éléments universellement transgressifs de $H(\mathbf{Sp}(n), Z)$ sont images d'éléments universellement transgressifs de $H(\mathbf{U}(2n), Z)$ par la transposée de l'injection (Prop. 21.1 et 21.2); les p-puissances réduites de $H(\mathbf{X}_n, K_p)$ et $H(\mathbf{Sp}(n), K_p)$ sont donc complètement déterminées par celles de $H(\mathbf{U}(2n), K_p)$, (voir au sujet de ces dernières [6]).

$$(31.5) \qquad \mathbf{Y}_n = \mathbf{U}(n)/\mathbf{SO}(n).$$

Nous en étudierons ici la cohomologie mod p pour $p \neq 2$.

PROPOSITION 31.4. *Soit $p \neq 2$. Alors* $\mathbf{U}(n)/\mathbf{SO}(n)$ *est sans p-torsion.* $\mathbf{SO}(2k+1)$ *est totalement non homologue à zéro* mod p *dans* $\mathbf{U}(2k+1)$ *et*

$$H(\mathbf{Y}_{2k+1}, K_p) = H(\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_5 \times \cdots \times \mathbf{S}_{4k+1}, K_p)$$

de plus: $H(\mathbf{Y}_{2k}, K_p) = H(\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_5 \times \cdots \times \mathbf{S}_{4k-3} \times \mathbf{S}_{2k}, K_p)$.

Pour $p \neq 2$, $\mathbf{SO}(n)$ est sans p-torsion (Prop. 10.4) et $H(B_{\mathbf{SO}(n)}, K_p)$ s'identifie à $I_{\mathbf{SO}(n)} \otimes K_p$ (Prop. 29.1 et 29.2). Il en est de même pour $\mathbf{U}(n)$.

Les calculs relatifs au cas $n = 2k+1$ seront pratiquement les mêmes que dans l'exemple précédent. Soient $\mathbf{T}^k \subset \mathbf{T}^{2k+1}$ des tores maximaux de $\mathbf{SO}(2k+1)$ et $\mathbf{U}(2k+1)$. On prend des bases $(s_0, s_1, \cdots, s_k, s_1', \cdots, s_k')$ et $(u_1, \cdots, u_k)$ de $H_1(\mathbf{T}^{2k+1}, Z)$ et $H_1(\mathbf{T}^k, Z)$, telles que $i(s_0) = 0$, $i(u_j) = s_j - s_j'$. Soient

$$(x_0, x_1, \cdots, x_k, x_1', \cdots, x_k') \quad \text{et} \quad (y_1, \cdots, y_k)$$

les bases duales de $H^1(\mathbf{T}^{2k+1}, Z)$ et $H^1(\mathbf{T}^k, Z)$; on aura

$$I_{\mathbf{U}(2k+1)} \otimes K_p = S(x_0, x_1, \cdots, x_k, x_1', \cdots, x_k') \otimes K_p$$

$$I_{\mathbf{SO}(2k+1)} \otimes K_p = S(y_1^2, \cdots, y_k^2) \otimes K_p$$

i^* est donnée par $i^*(x_0) = 0$, $i^*(x_j) = i^*(-x_j') = y_j$ $(j = 1, \cdots, k)$ l'image $I_{\mathbf{U}(2k+1)} \otimes K_p$ par $\rho_p^*(T^k, T^{2k+1})$ est bien $I_{\mathbf{SO}(2k+1)} \otimes K_p$; avec les identifications faites, cela signifie que $\rho_p^*(\mathbf{SO}(2k+1), \mathbf{U}(2k+1))$ est *sur*, donc que $\mathbf{SO}(2k+1)$ est totalement non homologue à zéro mod p dans $\mathbf{U}(2k+1)$, (Prop. 21.3). Comme on est dans le cas d'algèbres extérieures, $H(\mathbf{U}(2k+1), K_p)$ est alors additivement et multiplicativement isomorphe à $H(\mathbf{Y}_{2k+1}, K_p) \otimes H(\mathbf{SO}(2k+1), K_p)$, ce qui donne la formule annoncée pour $\mathbf{Y}_{2k+1}$.

Si maintenant $n = 2k$ est pair, soient $\mathbf{T}^k \subset \mathbf{T}^{2k}$ des tores maximaux

$$(x_1, \cdots, x_k, x_1', \cdots, x_k') \quad \text{et} \quad (y_1, \cdots, y_k)$$

des bases de $H^1(\mathbf{T}^{2k}, K_p)$ et $H^1(\mathbf{T}^k, K_p)$ telles que l'injection soit définie par $i^*(x_j) = i^*(-x_j') = y_j$ $(j = 1, \cdots, k)$; $I_{\mathbf{U}(2k)} \otimes K_p$ a comme générateurs les $2k$ fonctions symétriques élémentaires en $x_1, \cdots, x_k'$, $I_{\mathbf{SO}(2k)} \otimes K_p$ a comme générateurs les $k-1$ fonctions symétriques élémentaires $\sigma_i(y_1^2, \cdots, y_k^2)$,

$(i = 1, \cdots, k-1)$ et le monôme $y_1 \cdots y_k$. On obtient aisement:

$$(31.1)\qquad \begin{aligned} &\rho_p^*(\sigma_i(x_1, \cdots, x_k')) = 0 && (i = 1, 3, 5, \cdots, 2k-1) \\ &\rho_p^*(\sigma_{2i}(x_1, \cdots, x_k')) = (-1)^i \sigma_i(y_1^2, \cdots, y_k^2), && (j = 1, 2, \cdots, k) \end{aligned}$$

ρ_p^* peut être envisagé comme $\rho_p^*(\mathbf{T}^k, \mathbf{T}^{2k})$ ou comme $\rho_p^*(\mathbf{SO}(2k), \mathbf{U}(2k))$ vu les identifications faites.

$H(\mathbf{U}(2k), K_p)$ a un système de générateurs universellement transgressifs, que nous noterons ici $x_1, x_3, \cdots, x_{4k-1}$ ($Dx_i = i$). Nous considérons maintenant l'algèbre spectrale sur K_p de la Prop. 22.1; elle va de

$$H_2 = H(B_{\mathbf{SO}(2k)K_t}) \otimes H(U(2k), K_p)$$

à $H(Y_{2k}, K_p)$ de plus, vu (31.1)

$$\begin{aligned} &d_{i+1}\kappa_{i+1}^2(1 \otimes x_i) = 0 && (i = 1, 5, 9, \cdots, 4k-3) \\ &d_{i+1}\kappa_{i+1}^2(1 \otimes x_i) = (-1)^j \kappa_{i+1}^2(\sigma_j(y_1^2, \cdots, y_k^2)), && \\ & && (i = 4j-1; j = 1, 2, \cdots, k-1) \\ &d_{4k}\kappa_{4k}^2(1 \otimes x_{4k-1}) = (-1)^k \kappa_{4k}^2(y_1^2 \cdots y_k^2). && \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement l'algèbre spectrale; on voit que H_{4k+1} est l'algèbre terminale et que

$$H_{4k+1} = K_p[q_k]/(q_k^2) \otimes \wedge P'$$

($q_k = y_1 \cdots y_k$, P' espace sous-tendu par $x_1, x_5, x_9, \cdots, x_{4k-3}$). L'algèbre terminale a un système simple de générateurs de degrés $1, 5, \cdots, 4k-3$ et $2k$; il en est de même pour $H(\mathbf{Y}_{2k}, K_p)$, (Prop. 8.1). Les générateurs de degrés impairs sont forcément de carrés nuls ($p \neq 2$). Celui qui a le degré q_k est aussi de carré nul, car on peut le prendre dans $K_p[q_k]/(q_k^2)$ qui s'identifie canoniquement à une sous-algèbre de $H(\mathbf{Y}_{2k}, K_p)$, car ce sont les éléments de degré fibre 0 (cf. §4). Cela démontre la formule relative à $H(\mathbf{Y}_{2k}, K_p)$. Enfin $H(\mathbf{Y}_n, K_0)$ et $H(\mathbf{Y}_n, K_p)$, ($p \neq 2$) ayant même polynôme de Poincaré, $\mathbf{Y}_n$ est sans p-torsion.

Les p-puissances réduites (p impair) de $\mathbf{U}(2k+1)$ déterminent donc celles de $\mathbf{SO}(2k+1)$, (et les formules sont les mêmes que pour $\mathbf{Sp}(k)$). Une fois connu $H(\mathbf{Y}_{2k}, K_p)$ on construit facilement l'algèbre spectrale sur K_p de

$$(\mathbf{U}(2k), \mathbf{Y}_{2k}, \mathbf{SO}(2k), p);$$

on voit alors que l'image de i^*: $\mathrm{H}(\mathbf{U}(2k), K_p) \to H(\mathbf{SO}(2k), K_p)$ est la sous-algèbre engendrée par les éléments universellement transgressifs de degrés $3, 7, \cdots, 4k-5$, dont les p-puissances sont ainsi déterminées. Cela suffit pour connaître les p-puissances de $\mathbf{SO}(2k)$, ($p \neq 2$); le dernier générateur de $H(\mathbf{SO}(2k), K_p)$, qui est de degré $2k-1$, n'est pas lié aux autres par ces opérations cohomologiques, comme on l'indiquera dans un travail ultérieur.

Mod 2, les résultats diffèrent beaucoup de la Prop. 31.4. On calculera dans un prochain Mémoire le polynôme de Poincaré mod 2 de $\mathbf{U}(n)/\mathbf{O}(n)$ et on verra qu'il est égal à celui de $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2 \times \cdots \times \mathbf{S}_n$. On donnera aussi la cohomologie mod 2 des espaces

$$\mathbf{G}(n_1, \cdots, n_k) = \mathbf{O}(n)/\mathbf{O}(n_1) \times \cdots \times \mathbf{O}(n_k), \ (n_1 + \cdots + n_k = n),$$

analogues réels des espaces $\mathbf{W}(n_1, \cdots, n_k)$, qui, au point de vue additif, a été déterminée par C. Ehresmann [15]. On verra que $H(\mathbf{G}(n_1, \cdots, n_k), K_2)$ est isomorphe à $H(\mathbf{W}(n_1, \cdots, n_k), K_2)$ par un isomorphisme qui *double les degrés*.

GENÈVE, SUISSE

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BOREL, *Impossibilité de fibrer une sphère par un produit de sphères*, C. R. Acad. Sci. Paris **231** (1950), 943–945.

[2] A. BOREL, *Sur la cohomologie des variétés de Stiefel et de certains groupes de Lie*, Ibid. **232** (1951), 1628–1630.

[3] A. BOREL, *La transgression dans les espaces fibrés principaux*, Ibid. **232** (1951), 2392–2394.

[4] A. BOREL, *Sur la cohomologie des espaces homogènes des groupes de Lie compacts*, Ibid. **233** (1951), 569–571.

[5] A. BOREL, *Séminaire de Topologie algébrique de* l'E.P.F., Zurich (1951), Notes polycopiées.

[6] A. BOREL and J. P. SERRE, *Détermination des p-puissances réduites de Steenrod dans la cohomologie des groupes classiques. Applications* C. R. Acad. Sci. Paris **233** (1951), 680–682.

[7] N. BOURBAKI, Algèbre multilinéaire, Act. Sci. & Industr. 1044, Hermann éd., Paris (1948).

[8] E. CARTAN, *Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos*, . . . , Annales Soc. Pol. Math. VIII (1929), 181–225; aussi Selecta, Paris (1939), 203–223.

[9] H. CARTAN, *Séminaire de Topologie algébrique de* l'E.N.S. II, Paris (1949–50), Notes polycopiées.

[10] H. CARTAN, idem III, (1950–51).

[11] H. CARTAN, a. *Notions d'algèbre différentielle, application aux groupes de Lie*, . . . , b. *La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal*, Colloque de Topologie algébrique, Bruxelles (1950), 16–27 et 57–71.

[12] S. S. CHERN, *Characteristic classes of hermitian manifolds*, Ann. of Math. **47** (1946), 85-121.

[13] S. S. CHERN, *On the multiplication in the characteristic ring of a sphere bundle*, Ibid. **49** (1948), 362–372.

[14] C. EHRESMANN, *Sur la topologie de certains espaces homogènes*, Ibid. **35** (1934), 396–443.

[15] C. EHRESMANN, *Sur la topologie de certaines variétes algébriques réelles*, J. Math. Pures Appl. IXs. **16** (1937), 69–100.

[16] C. EHRESMANN, *Sur la variété des génératrices planes d'une quadrique réelle et sur la topologie du groupe orthogonal à n variables*, C. R. Acad. Sci. Paris **208** (1939), 321–323.

[17] C. EHRESMANN, *Sur la topologie des groupes simples clos*, Ibid. **208** (1939), 1263–1265.

[18] C. EHRESMANN, *Sur la théorie des espaces fibrés*, Colloque international de Topologie algébrique, Paris (1949), 3–15.

[19] H. HOPF, *Ueber die Topologie der Gruppen-Mannifaltigkeiten und ihrer Verallgemeinerungen*, Ann. of Math. **42** (1941), 22–52.

[20] H. HOPF and H. SAMELSON, *Ein Satz über die Wirkungsräume geschlossener Liescher Gruppen*, Comment. Math. Helv. **13** (1940–41), 240–251.

[21] J. L. KOSZUL, *Homologie et cohomologie des algèbres de Lie*, Bull. Soc. Math. France **78** (1950), 65–127.

[22] J. L. KOSZUL, *Sur la structure multiplicative de l'anneau de cohomologie des espaces homogènes*, Colloque de Topologie algébrique, Bruxelles (1950).

[23] J. LERAY, *L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue*, Jour. Math. Pures Appl. IXs. **29** (1950), 1–139.

[24] L. LERAY, *L'homologie d'un espace fibré dont la fibre est connexe*, Ibid. **29** (1950), 169–213.

[25] J. LERAY, *Sur l'homologie des groupes de Lie, des espaces homogènes et des espaces fibrés principaux*, Colloque de Topologie algébrique, Bruxelles (1950), 101–115.

[26] L. S. PONTRJAGIN, *Homologies in compact Lie groups*, Rec. Math. (Mat. Sbornik) N.S. **6** (1939), 389–422.

[27] L. S. PONTRJAGIN, *Characteristic cycles on differentiable manifolds*, Rec. Math. (Mat. Sbornik) N.S. **21** (1947), 233–284.

[28] H. SAMELSON, *Beiträge sur Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten*, Ann. of Math. **42** (1941), 1091–1137.

[29] J. P. SERRE, *Homologie singulière des espaces fibrés. Applications*, Ann. of Math. **54** (1951), 425–505.

[30] E. SPANIER, *Cohomology theory for general spaces*, Ibid. **49** (1948), 407–427.

[31] N. STEENROD, The topology of fibre bundles, Princeton (1951).

[32] E. STIEFEL, *Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten*, Comment. Math. Helv. **8** (1935–36), 3–51.

[33] E. STIEFEL, *Ueber eine Beziehung zwischen geschlossenen Lieschen Gruppen und diskontinuerlichen Bewegungsgruppen*, etc., Ibid. **14** (1941–42), 350–380.